# 함수(Functions)

1. 수와 직교좌표
2. 함수
3. 대수함수와 초월함수
4. 합성함수와 역함수
5. 삼각함수와 역삼각함수
6. 지수함수와 로그함수

역사적으로
1. Leibniz(1646-1716)가 함수라는 용어를 처음으로 사용하였으며,
2. Euler(1707-1783)는 함수를 변수와 상수로 이루어진 식으로 정의하고 $f(x)$기호를 도입하였으며,
3. Cauchy(1789-1857)는 독립변수와 종속변수라는 용어를 사용해서 종속변수를 독립변수의 함수라고 정의하였다.
4. Dirichlet(1805-1859)는 함수를 두 집합 사이의 대응관계로 정의하였고
5. Dedekind(1831-1916)는 집합론을 기초로 하여 원소들의 순서쌍으로 함수를 정의하였다.

## 1. 수와 직교좌표

수: 우리에게 가장 익숙하고 쉬운 첫 번째 수의 체계로 자연수를 생각해 볼 수 있다. 앞으로 자연수의 집합은 $\mathbb{N}$으로 표기한다. 즉,

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}.$$

자연수와 영, 그리고 자연수의 음수를 정수라 부르고 정수의 집합은 $\mathbb{Z}$로 표기한다. 즉,

$$\mathbb{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}.$$

자연수에서 정수로의 확장은 $x+2=1$와 같은 일차 방정식의 해를 구하는 필요성에서 자연스럽게 요구된다. 마찬가지로 일차 방정식 $2x=1$의 해는 정수에서는 존재하지 않으므로 유리수를 도입함으로써 해의 존재성을 유지할 수 있다. 따라서 유리수는 정수를 $0$이 아닌 정수로 나눈 수, 즉 $0$이 아닌 정수 분의 정수가 유리수이고 유리수의 집합을 $\mathbb{Q}$로 표기한다. 즉,

$$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}:m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{Z}-\{0\}\}.$$

유리수의 중요 특징은 모든 유리수는 순환하는 무한 소수라는 점이다. 이차 방정식 $x^2=2$은 유리수에서는 해가 존재하지 않는다. 따라서 위와 같은 이차 방정식의 해를 구하기 위해서는 새로운 수의 체계가 필요한데 그들이 바로 무리수이다. 수학적으로는 무리수를 순환하지 않는 무한 소수라 정의한다. 그리고 유리수와 무리수를 통틀어 실수라고 하고 실수들의 집합을 $\mathbb{R}$로 표기한다.

한편, 이차 방정식 $x^2=-1$은 실수 범위에서 해가 존재하지 않는다. 이유는 모든 실수는 제곱하면 양수가 되기 때문이다. 따라서 제곱했을 때 음수가 되는 새로운 수가 필요하게

되는데 $i^2=-1$인 $i$을 허수라고 부르고 두 실수 $a,b$와 $i$을 결합해서 만든 수 $a+bi$을 복소수라고 부른다. 복소수의 집합은 $\mathbb{C}$로 나타내는데 임의의 다항 방정식은 복소수 범위에서 모든 해가 구하여진다는 것이 알려져 있다. 즉, 다항 방정식의 해를 구하는 것으로만 보면 복소수에서 수의 확장이 완성된다고 할 수 있다. 그러나 허수가 갖고 있는 성질을 일반화하는 과정에서 사원수(Quaternions)와 팔원수(Octonions), 십육원수(Sedenions) 등의 수의 확장이 가능하고 이 외에도 다른 방법의 수의 확장이 존재하는데 이는 미적분학의 범위를 벗어난다. 우리는 앞으로 실수 범위에서만 수를 다루도록 할 것이다.

직교좌표: 하나의 직선을 생각해보자. 이 직선 위의 한 점에 하나의 실수를 일대일 대응시킬 수 있다는 것이 알려져 있다. 즉 직선과 실수는 일대일 대응한다. 그래서 이 직선을 실직선이라고도 부르며, 실수 집합과 실직선을 모두 $\mathbb{R}$로 나타낸다. 이렇게 기하학적인 점에 하나의 실수를 대응시킴으로써 실수 사이의 연산에 의한 대수적 계산이 쉬워지는 효과가 있다. 특히, 한 점 $p$을 원점에서 시작해서 $p$에서 끝나는 벡터로 보면 실직선은 $1$차원 벡터 공간이 된다.

이번엔 평면 위의 한 실직선 $\ell$과 함께 $\ell$과 수직으로 만나는 또 다른 실직선 $m$을 생각해보자. 두 직선이 만나는 점을 원점이라 부르자. 두 실직선에 대응하는 실수를 오른쪽 방향과 위쪽 방향이 양수가 되도록 정한다. 그리고 평면 위에 한 점 $p$을 잡고 $p$에서 직선 $\ell$로 수선의 발을 내리자. 이 때 이 수선의 발은 단 하나다. 이유는 수선의 발이 두 개이면 수선을 두 변으로 하고 수선의 두 발 사이의 한 변과 더불어 하나의 삼각형이 생기는데 이 삼각형의 세 내각의 합이 두 직각보다 커지므로 유클리드 기하에 모순된다. 같은 이유로 실직선 $m$ 위로도 하나의 수선의 발을 유일하게 내린다. 그렇게 대응하는 실수 $a\in\ell$와 $b\in m$의 순서쌍 $(a,b)$을 점 $p$에 대응시키면 평면 위의 임의의 점에 두 실수의 순서쌍 하나가 유일하게 대응한다. 즉, 평면과 두 실수의 순서쌍으로 이루어진 집합이 일대일 대응한다. 이 집합을 $\mathbb{R}^2$ 또는 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$로 나타낸다. 즉,

$$\mathbb{R}^2=\{(a,b):a\in\mathbb{R}\,,\,b\in\mathbb{R}\}.$$

이 집합을 데카르트 평면 또는 유클리드 평면이라고 부르고, 평면 위의 점에 위와 같은 방법으로 좌표를 정하는 것을 직교좌표라고 한다. 이 평면 위의 점을 원점이 시점인 벡터로 보면 $\mathbb{R}^2$는 $2$차원 벡터 공간이 된다. 벡터 공간에 대한 것은 9장에서 자세히 알아보자.

평면 위의 점 $p=(a,b)$을 두 실수의 순서쌍이 아닌 복소수 $p=a+bi$로 나타낼 수도 있는데 이때는 복소평면이라 부르고 $\mathbb{C}$로 나타낸다. 이 책에서는 복소수를 다루지 않으므로 평면이라 할 때는 유클리드 평면 $\mathbb{R}^2$만을 생각하면 된다.

## 2. 함수

### 2.1 정의

함수 $f : X \to Y$는 (수)집합 $X$의 각 원소에 (수)집합 $Y$의 단 하나의 원소를 대응시키는 규칙이다. 이 때 $X$을 정의역(domain), $Y$을 공역(codomain)이라한다.

(1) 치역(range) $f(X) \equiv \{f(x) \in Y : x \in X\} \subset Y$

(2) 그래프(graph) $graph(f) \equiv \Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$

(3) 정의역의 임의의 수를 나타내는 표기를 독립변수라 하고 치역에 있는 수를 나타내는 표기를 종속변수라 한다.

정의역이 자연수 전체인 함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 을 수열이라 하고 $f(n) = a_n$으로 쓴다.

우리가 앞으로 다루는 모든 함수는 정의역이 실수의 범위 안에서 이다. 특히, 다음과 같은 실수의 부분집합이 자주 쓰이게 된다.

### 2.2 실수의 구간

(1) $[a, b] = \{x \mid a \leqq x \leqq b\}$ : 닫힌(폐) 구간(closed interval)

(2) $(a, b] = \{x : a < x \leqq b\}$ : 반 개구간(half open interval)

(3) $[a, b) = \{x \mid a \leqq x < b\}$ : 반 개구간(half open interval)

(4) $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ : 열린(개) 구간(open interval)

(5) $(-\infty, \infty) = \{x : -\infty < x < \infty\}$은 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 과 같다.

### 2.3 Remark 최대 정의역의 원칙(자연 정의역)

일반적으로, 주어진 함수의 정의역이 정해지지 않은 경우, 이 함수의 정의역은 함수에 관한 대응 규칙을 정의할 수 있는 최대 범위의 집합으로 약속한다.

**2.4 보기** (1) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ 의 자연 정의역은 $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$이다.

(2) $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ 의 자연 정의역은 $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\}$, 즉 $[-2, 2]$이다.

앞으로 자주 쓰이는 함수에 대한 용어를 정의하고 그 특징을 알아보자.

### 2.5 정의 단사함수, 전사함수, 전단사 함수

(1) 단사함수 = 1-1 함수 (수평선 판정법)

(2) 전사함수 : 공역과 치역이 같은 함수

(3) 전단사 함수 = 1:1 대응

**2.6 증가함수와 감소함수**

증가함수: 정의역 안의 임의의 원소 $x_1, x_2$에 대해 $x_1 < x_2$일 때 항상 $f(x_1) \leqq f(x_2)$가 성립하면 $f$을 증가함수라 하고 $f(x_1) < f(x_2)$이면 순증가 함수라 한다.

감소함수: 정의역 안의 임의의 원소 $x_1, x_2$에 대해 $x_1 < x_2$일 때 항상 $f(x_1) \geqq f(x_2)$가 성립하면 $f$을 감소함수라 하고 $f(x_1) > f(x_2)$이면 순감소 함수라 한다.

참고. 책에 따라 $f(x_1) < f(x_2)$이면 증가함수 $f(x_1) > f(x_2)$이면 감소함수라 하기도 하므로 책의 글쓴이가 사용하는 정의를 확인해 볼 것.

**2.7 정의** 우함수와 기함수

우함수: 정의역의 임의의 원소 $x$에 대해 $f(x) = f(-x)$가 성립하는 함수.

예를 들어, $f(x) = x^2$, $\cos x$, $\frac{x^2}{1+x^4}$ 등이 있다.

우함수의 특징은 그래프가 $y$축에 대칭이다.

기함수: 정의역의 임의의 원소 $x$에 대해 $f(-x) = -f(x)$가 성립하는 함수.

예를 들어, $f(x) = x^3$, $\sin x$ 등이 있다.

기함수의 특징은 그래프가 원점에 대칭이다.

**2.8 연습문제** $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$에서 $h(x)$가 기함수이고 $g(x)$가 우함수이면 $f(x)$가 기함수임을 보이시오.

**2.9 정의** 함수의 연산

두 함수 $f: X \to \mathbb{R}$ 이고 $g: Y \to \mathbb{R}$ 에 대해 $f \pm g$, $fg$의 정의역은 $X \cap Y$ 이고 $\frac{f}{g}$의 정의역은 $X \cap (Y - \{x : g(x) = 0\})$ 이다.

## 3 대수함수와 초월함수

수학에서 주로 쓰이는 함수는 크게 대수함수와 초월함수로 나뉜다. 대수(적) 함수는 다항 함수에 대수적 연산(가감승제)을 써서 만든 함수로써, 대수함수로는 다항함수, 유리함수, 무리함수 등이 있다. 초월함수는 대수적함수가 아닌 함수로 삼각, 지수, 로그 함수와 그 밖에도 이름 지어지지 않은 많은 함수들이 초월 함수이다. 이 절에서는 대수함수인 다항함수, 유리함수, 무리함수의 기본 성질에 대해 알아보고, 4절에서 삼각함수와 그 역함수, 그리고 5절에서는 지수 함수와 그 역함수인 로그함수에 대해 알아본다. 또 다른 중요한 초월함수인 쌍곡(삼각)함수는 뒤에 알아본다.

다항함수: $n$차 다항(식)함수(Polynomials) $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$의 정의역은 실수 집합 $\mathbb{R}$ 전체이고, 상수함수와 항등함수는 가장 간단한 다항함수이다. 나중에 알게 되겠지만 모든 다항함수는 정의역인 실수 집합 $\mathbb{R}$에서 연속이고 미분 가능하다. 그래프의 모양은 선형(1차) 함수 $y=mx+b$의 그래프는 직선이고 2차함수의 그래프는 포물선이지만 3차 이상의 다항 함수에 대해서는 공통된 특징을 짓기가 어렵다.

**3.1 Remark** 3차 이상의 $n$차 다항 함수 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$의 그래프를 그리는 것은 단순하지 않지만 몇 가지 중요한 특징들이 있다.

(1) 다항함수의 정의역은 실수 전체 집합이다.

(2) $n$이 짝수이고, $a_n>0$이면 매우 큰 양 및 음의 값 $x$에 대해 위쪽으로 뻗어 올라간다. $a_n<0$이면 반대이다.

(3) $n$이 홀수이고 $a_n>0$이면 그래프는 매우 큰 양의 값 $x$에 대해 위쪽으로 뻗어 올라가고 매우 큰 음의 값 $x$에 대해서는 아래쪽으로 뻗어 내려간다. $a_n<0$이면 반대이다.

(4) 차수가 1보다 큰 다항함수의 그래프의 부분은 직선이 아니다.

(5) 다항함수의 그래프는 중간에 끈기지 않고 매끄럽게 연속적으로 이어진 하나의 곡선이다 (연속성과 미분가능성에 관련된다).

(6) $n$차 다항함수의 그래프는 기껏해야 $n-1$번 증감이 바뀌는 점을 갖는다.

(7) 다항함수를 1차식의 인수의 곱으로 나타낼 수 있으면 $x$절편을 구하기가 쉽고, 이를 이용해 그래프가 $x$축 위에 놓이는 곳과 아래쪽에 놓이는 곳을 알아내기가 쉽다.

Note. 다항방정식의 근인 $x$절편을 알면 다항함수의 그래프를 그리기가 쉽지만, 3차 이상의 다항방정식의 근을 정확하게 구하는 것은 일반적으로 쉽지 않다.

**3.2 보기** 다항함수 $P(x)=x^3+x^2-6x$의 그래프를 그리시오.

풀이: 다항식 $x^3+x^2-6x$을 인수분해하면 $P(x)=x(x-2)(x+3)$이고 $x$절편은 $-3,0,2$이므로 $x$축을 4개의 구간 $(-\infty,-3)$, $(-3,0)$, $(0,2)$, $(2,\infty)$으로 나눈다. 그리고 각 구간에서 $P(x)$의 부호를 판단해보면, $P(x)$의 그래프는 $(-3,0)$과 $(2,\infty)$에서는 $x$축의 위쪽에, $(-\infty,-3)$과 $(0,2)$에서는 $x$축의 아래쪽에 있고 주어진 다항함수 $P(x)=x^3+x^2-6x$의 그래프에서 증감이 바뀌는 점은 정확히 2개이다.

**3.3 연습문제** 함수 $f(x)=x^2(2-x)$의 그래프를 그리시오.

**3.4 정의 유리함수**

$P(x)$와 $Q(x) \neq 0$가 다항식일 때

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

로 정의된 함수를 **유리함수**(rational function)라 한다. $0$으로 나누기는 할 수 없으므로, 유리함수 $f$의 정의역은 $Q(x) = 0$인 $x$을 제외한 모든 실수 즉, $\{x : Q(x) \neq 0\}$이다. 따라서 유리함수의 그래프는 연속적으로 이어지지 않고 불연속이 일어나는 경우가 흔하다.

**3.5 보기** 다음 함수의 정의역을 구하시오.

(1) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ (2) $g(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ (3) $h(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

풀이: (1) 분모가 $0$이 되는 모든 값을 제외하면 $f$의 정의역은 $x = 1$을 뺀 모든 실수이다.

(2) $x = \pm 1$일 때 $x^2 - 1 = 0$이므로 $g$의 정의역은 $x \neq \pm 1$을 제외한 모든 실수이다.

(3) $x^2 + 1 \neq 0$이므로 $h$의 정의역은 모든 실수의 집합 $\mathbb{R}$이다.

**3.6 정의**

그래프가 어떤 직선에 매우 가깝게 접근하면서 그래프와 만나지 않는 직선을 그래프의 **점근선**(asymptote)이라 한다. 그래프 위의 점의 $x$좌표가 어떤 값 $a$로 가까워질수록 그 점의 $y$좌표가 무한히 증가하거나 감소하면 직선 $x = a$는 그래프의 **수직점근선**이다. $x$가 무한히 증가 또는 감소할 때 $y$가 어떤 특정한 값 $b$로 한없이 가까워지면 직선 $y = b$는 그래프의 **수평점근선**이다.

Note. 유리함수의 그래프를 그리는데 점근선이 매우 유용하며 수직점근선은 분모가 $0$이 되고 분자가 $0$이 아닌 수에서 발생한다.

**3.7 정리**

(1) 실수 $a$가 방정식 $Q(x) = 0$의 근이고 $P(x) = 0$의 근이 아닐 때 유리함수

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

의 그래프는 수직점근선 $x = a$을 가진다.

(2) 다항식 $Q(x)$의 차수가 다항식 $P(x)$의 차수보다 크거나 같으면 유리함수

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

의 그래프는 수평점근선을 갖는다.

**3.8 보기** 다음 함수의 그래프를 그리고 수직점근선과 수평점근선을 구하시오.

(1) $f(x)=\frac{1}{x}$ (2) $g(x)=\frac{1}{x^2}$

**3.9 연습문제** 다음 함수의 그래프를 그리시오.

(1) $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$ (2) $g(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$

**3.10 정의 무리함수**

근호 안에 미지수를 포함한 식을 그 미지수에 대한 무리식이라 하고, 무리식으로 주어진 함수를 무리함수라고 한다. 다시 말해 무리함수는 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 무리식이다.

Note. (1) 무리함수 $\sqrt{f(x)}$의 정의역은 $\{x : f(x) \geq 0\}$이다.
(2) $\sqrt[n]{g(x)}$에서 $n$이 홀수이면 $g(x)$는 모든 실수에서 정의되지만 $n$이 짝수이면 $g(x) \geq 0$ 이어야 한다.

**3.11 보기** 다음 함수의 정의역을 구하시오.

(1) $f(x)=\sqrt{x-2}$ (2) $g(x)=\sqrt[3]{1-x^2}$

풀이: $f(x)=\sqrt{x-2}$의 경우 $x-2 \geq 0$ 일 때 정의되므로 정의역은 구간 $(4,\infty)$이고, $g(x)=\sqrt[3]{1-x^2}$ 의 경우에는 $1-x^2$가 모든 실수에서 정의되므로 정의역이 실수 전체이다.

**3.12 Remark** $y=\sqrt{ax}$ $(a\neq 0)$의 그래프
(1) $a>0$이면 정의역은 $x \geq 0$, 치역은 $y \geq 0$, 그래프는 1사분면에 그려진다.
(2) $a<0$일 때 정의역은 $x \leq 0$, 치역은 $y \geq 0$, 그래프는 2사분면에 그려진다.

Note. 무리함수 $f(x)=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 $x$축 방향으로 $p$만큼, 그리고 $y$축 방향으로 $q$만큼 평행 이동하여 그린다.

**3.13 보기** 무리함수 $f(x)=\sqrt{2x+3}+4$의 그래프를 그려라.

풀이: $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 $x$축 방향으로 $-\frac{3}{2}$만큼, $y$축 방향으로 4만큼 평행이동하여 그린다.

**3.14 보기** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ 의 그래프를 그리시오.

풀이: $\sqrt{x-2}$ 가 정의되기 위해서는 $x-2\geqq 0$ 이어야 하고 분모가 $0$ 이 되는 것을 피하기 위해서는 $x-2>0$ 이어야 한다. 따라서 위 함수의 정의역은 $x>2$ 인 모든 실수, 즉 구간 $(2,\infty)$ 이다. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 의 그래프를 그린 뒤 $x$ 축 방향으로 만큼 평행 이동하여 그린다.

**3.15 Remark** 무리식은 근호 안의 수식의 거듭제곱 여부에 따라 유리식과 같은 간단한 형태로 바꿔 쓸 수 있는데 이 때 다음을 주의해야 한다.

(1) $\sqrt{P^2}=|P|$

(2) $\sqrt[3]{P^3}=P$

**3.16 보기** 다음 각 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt{a^2-2a+1}$ (2) $\sqrt{(a^2+2a+2)^2}$ (3) $-\sqrt[3]{(-x)^3}$

풀이: (1) $\sqrt{a^2-2a+1}=\sqrt{(a-1)^2}$ 인데 $a-1$ 은 $a$ 에 따라 부호가 다를 수 있다. 따라서 다음과 같이 두 경우로 나누어 나타내야 한다.

$$\sqrt{a^2-2a+1}=\sqrt{(a-1)^2}=|a-1|=\begin{cases}a-1\,,\,a\geqq 1\\ 1-a\,,\,a<1\end{cases}$$

(2) $\sqrt{(a^2+2a+2)^2}=\sqrt{[(a+1)^2+1]^2}$ 이고 $a^2+2a+2=(a+1)^2+1>0$ 이므로
$\sqrt{(a^2+2a+2)^2}=a^2+2a+2$ 이다.

(3) $-\sqrt[3]{(-x)^3}=-(-x)=x.$

## 4 합성함수와 역함수

이미 주어진 함수들을 써서 새로운 함수들을 정의하는 방법으로
(1) 함수들을 더하고 빼고 곱하고 나누는 방법과
(2) 함수를 합성하거나 역함수를 정의하는 방법이 있다.

**4.1 보기** $y=\sqrt{x^2+1}$ 을 두 함수의 합성으로 나타내시오.

풀이: $f(x)=x^2+1\,,\ g(x)=\sqrt{x}$ 라고 하면
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(x^2+1\right)=\sqrt{x^2+1}$

역함수에 대해 유의해야 할 점을 알아보자. 모든 함수가 역함수를 갖는 것은 아니고 역함수를 갖기 위해서는 **일대일함수**(one-to-one function)라는 조건이 꼭 필요하다. 즉, 정의역의 서로 다른 두 원소는 치역의 서로 다른 원소로 대응되어야 한다. 왜냐하면 역함수도 일종의 함수이므로 함수가 정의되기 위해서는 정의역의 원소는 치역의 단 하나의 원소로 꼭 대응이 되어야 하기 때문이다. 자주 등장하는 함수들 중에서 순증가함수 또는 순감소함수는 항상 일대일 함수이다.

**4.2 역함수**

정의역이 $X$이고 치역이 $Y$인 일대일 함수 $f$을 생각하자. 함수 $g$는 정의역이 $Y$이고 치역이 $X$라고 하자. 만약

(i) 모든 $x \in X$에 대하여, $g(f(x)) = x$ 이고

(ii) 모든 $y \in Y$에 대하여, $f(g(y)) = y$ 일 때

$g$을 $f$의 **역함수**(inverse function)라 하고 $f^{-1}$로 쓴다. 따라서

(iii) 모든 $x \in X$에 대하여, $f^{-1}(f(x)) = x$ 이고

(iv) 모든 $y \in Y$에 대하여, $f(f^{-1}(y)) = y$ 이다.

Note. (1) $f^{-1}$에서 $-1$을 음의 지수와 혼동하지 말 것, 즉 $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$ 이다.

(2) 역함수의 정의로부터 $f$의 정의역과 $f^{-1}$의 치역은 같고 $f^{-1}$의 정의역은 $f$의 치역과 같다.

(3) 함수 $f : X \to Y$의 역함수 $f^{-1} : Y \to X$가 존재하기 위한 필요충분조건은 $f$가 $1:1$대응(전단사함수)이다.

**4.3** 일대일 함수의 역함수 구하는 방법과 그래프 그리기

step 1. $y = f(x)$라고 쓴다.

step 2. 이 방정식을 (가능하다면) $x$가 $y$에 대한 식이 되도록 푼다.

step 3. $x$와 $y$을 서로 맞바꾸면 $y$의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 이다.

Note. $f^{-1}$의 그래프와 $f$의 그래프는 $y = x$에 대해 대칭이다.

**4.4 보기** $f(x) = x^3 + 2$의 역함수를 구하시오.

답: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$

**4.5 연습문제** 다음 함수의 역함수를 존재하면 구하시오.

(1) $f(x) = (x-1)^3$ (2) $f(x) = x^2 - 3$

### 4.6 Remark

(1) 함수 $f$가 순증가(순감소)함수이면 역함수가 존재하고 $f^{-1}$도 순증가(순감소)함수이다.
(2) $f:[a,b]\to[c,d]$ 가 연속인 순증가(순감소) 함수이면 $f^{-1}:[c,d]\to[a,b]$ 도 연속이고 순증가 (순감소)함수이다. [순감소일 때는 $f^{-1}:[d,c]\to[a,b]$ 이다.]

## 5 삼각함수와 역삼각함수

평면 위의 한 점 $O$에서 시작하는 반직선 $OX$와 $OP$을 생각하자. 이 때 $XOP$는 반직선 $OX$와 반직선 $OP$사이의 각도를 의미한다. 시계바늘이 회전하는 방향에 반대로 회전하는 경우를 **양의 방향**, 같은 방향으로 회전하는 경우를 **음의 방향**으로 정하여 회전방향을 구별한다. $OX$을 출발하여 $OP$에 이를 때까지 회전한 각의 크기는 회전수와 회전방향에 따라 다르다. 이 각을 $OX$와 $OP$에 의해 만들어지는 **일반각**이라 한다. 이때 $O$을 **극점**, $OX$을 **극축**이라 한다.

$OX$와 $OP$가 이루는 한 각을 $\theta$라 하면, 일반각은 다음과 같이 표현된다.

$$360^\circ\times n+\theta\ ,\ n\text{은 정수}$$

좌표평면에 일반각을 표현하여 보자. 양의 $x$축을 극축으로 하고, $OP$가 1사분면, 2사분면, 3사분면, 4사분면에 있을 때를 고려하여, $OP$에 의해 만들어진 일반각을 각각 1사분면, 2사분면, 3사분면, 4사분면의 **각**이라 한다.

### 5.1 호도법

호도법이란 각의 크기를 실수로서 파악할 수 있는 단위법으로 반지름이 $r$인 원에서 호의 길이가 반지름 $r$과 같은 각의 크기를 $1\,\mathrm{rad}$(라디안)이라 한다. 따라서 비례식

$$\text{원둘레 } 2\pi r \ :\ \text{원둘레의 각 } 360^\circ \ =\ \text{호의 길이 } r \ :\ \text{원호 } 1\,\mathrm{rad}$$

이 성립하고 1rad은 반지름과 상관없이 일정하며

$$\pi\ \mathrm{rad}=180^\circ$$

이며 $1$ rad을 단위로 각의 크기를 재는 방법을 **호도법**이라 한다.

Note. 호도법에서는 보통 rad단위를 쓰는 것을 생략한다.

**5.2 보기** 다음에 주어진 각도를 라디안으로 고치시오.

(1) $0^\circ$ (2) $30^\circ$ (3) $45^\circ$ (4) $60^\circ$
(5) $90^\circ$ (6) $180^\circ$ (7) $270^\circ$ (8) $360^\circ$

풀이: (2) $180^\circ=\pi\ rad$이므로 $30^\circ$에 대응하는 radian을 $x$라 두면

$$180:\pi\ =\ 30:x$$

가 성립한다. 따라서 $x=\dfrac{\pi}{6}$ (rad) 이다.

### 5.3 정의

(1) $\sin x = \sin(x+2\pi) : \mathbb{R} \to [-1,1]$ (2) $\cos x = \cos(x+2\pi) : \mathbb{R} \to [-1,1]$

(3) $\tan x = \tan(x+\pi) : \mathbb{R} - \left\{ \frac{2n-1}{2} : n \in \mathbb{N} \to \mathbb{R} \right\}$

(4) $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ , $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ , $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

### 5.4 삼각함수의 공식

(1) 제곱 공식 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

(2) 덧셈공식 $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$ (부호는 복호동순)

(3) 배각공식 $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(4) 반각공식 $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

(5) 코사인공식 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

### 5.5 역삼각함수의 정의역과 치역

(1) $\sin^{-1} x : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(2) $\cos^{-1} x : [-1,1] \to [0, \pi]$

(3) $\tan^{-1} x : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(4) $\cot^{-1} x : \mathbb{R} \to (0, \pi)$

(5) $\sec^{-1} x : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup [0, \frac{\pi}{2})$

(6) $\csc^{-1} x : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup [0, \frac{\pi}{2})$

Note. (1) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$일 때, $\sin^{-1}(\sin x) = x$.

(2) $-1 \le x \le 1$일 때, $\sin(\sin^{-1} x) = x$.

**5.6 보기** (1) $\sin^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, $\sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$, $\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

(2) $\sin^{-1}(\sin\frac{\pi}{12}) = \frac{\pi}{12}$, $\sin^{-1}(\sin\frac{2\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$, $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$, $\cos(\cos^{-1}\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

(3) $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, $\tan(\arcsin\frac{1}{3}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

(4) $\cos(\sin^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}$, $\cos(\tan^{-1}x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\sec(\tan^{-1}x)=\sqrt{1+x^2}$

**5.7 Remark** $y=\sec^{-1}x$라 할 때 $x=\sec y=\dfrac{1}{\cos y}$이므로 $\cos y=\dfrac{1}{x}$이다. 따라서

$$\sec^{-1}x=\cos^{-1}(\frac{1}{x}).$$

예를 들어, $\sec^{-1}(-1)=\cos^{-1}(-1)=\pi$, $\sec^{-1}(2)=\cos^{-1}(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{3}$.

**5.8 연습문제**

(1) $\sin(\cos^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}$ 임을 보이시오.

증명: $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $0\le\theta\le\pi$에서 $\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$ 이다. 또한, $-1\le x\le 1$에서 $0\le\cos^{-1}x\le\pi$이므로 $\sin(\cos^{-1}x)\ge 0$이다. 따라서

$$\sin(\cos^{-1}x)=\sqrt{1-\cos^2(\cos^{-1}x)}=\sqrt{1-x^2}.$$

(2) $\tan(\sec^{-1}x)=\pm\sqrt{x^2-1}$ 임을 보이시오.

증명: $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$이므로 $\tan\theta=\pm\sqrt{\sec^2\theta-1}$ 이고 $\sec^{-1}x$는 $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$에서 정의되고 $\sec^{-1}x\in[-\pi,-\frac{\pi}{2})\cup[0,\frac{\pi}{2})$이므로

$$\tan(\sec^{-1}x)=\pm\sqrt{\sec^2(\sec^{-1}x)-1}=\begin{cases}\sqrt{x^2-1}\ , x\ge 1\\ -\sqrt{x^2-1}\ , x\le -1\end{cases}$$

(3) $\sin[2\cos^{-1}(\frac{2}{3})]$을 구하시오.

풀이: $\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$이므로

$$\sin(2\cos^{-1}(\frac{2}{3}))=2\sin(\cos^{-1}(\frac{2}{3}))\cos(\cos^{-1}(\frac{2}{3}))=2\sqrt{1-\frac{4}{9}}\,\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

(4) $\cos(2\tan^{-1}x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$임을 보이시오.

증명: $\cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1$이므로

$$\cos(2\tan^{-1}x)=2\cos^2(\tan^{-1}x)-1=\frac{2}{\sec^2(\tan^{-1}x)}-1=\frac{2}{1+x^2}-1=\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

## 6 지수 함수와 로그

**6.1 정의**

| $a$가 1이 아닌 양수라고 하자. $f(x)=a^x$으로 정의된 함수를 지수함수라고 한다. 이 때 상수 $a$을 밑(base)이라고 한다. |
|---|

Note. (1) 함수 $f(x)=2^x$ 은 변수 $x$가 지수이므로 지수함수라 하고, $g(x)=x^2$은 다항함수이므로 이 둘을 혼동하지 말 것.

(2) 지수함수 $f(x)=a^x$에서 $a$가 양수라는 조건은 중요하다. 왜냐하면 $x=\frac{1}{2}$이고 $a=-2$와 같은 음수인 경우 $a^x=(-2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-2}$ 은 실수가 아니므로 정의되지 못한다. 한편, $a=1$인 경우에는 $f(x)=1^x=1$이므로 상수함수가 된다.

**6.2 지수 법칙**

$a, b>0$일 때 모든 실수 $x, y$에 대하여 다음의 지수법칙이 성립한다.
양의 실수 $a, b$에 대해,

(1) $a^{x+y}=a^x a^y$

(2) $a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y}$

(3) $(a^x)^y=a^{xy}$

(4) $(ab)^x=a^x b^x$

**6.3 자연 지수** $e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \approx 2.71828$

모든 실수 $x$에 대하여 $a^x$는 유일한 양의 값을 가지므로 $y=a^x$가 정의된다. 즉, $f(x)=a^x$의 정의역은 모든 실수의 집합이고 치역은 양의 실수의 집합이 된다. $f(x)=a^x$의 그래프는 아래에 그려져 있다. $a>1$이면 $x$가 커질수록 $a^x$도 커지므로 $f(x)=a^x$는 증가함수이며, 특히 $x$가 무한대로 증가할수록 $a^x$는 무한대로 급격히 증가한다. 반대로 $0<a<1$이면 $x$가 커질수록 $a^x$는 작아지는데 $x$가 음의 무한대로 접근할수록 $a^x$는 무한대로 급격히 증가하고 $x$가 양의 무한대로 접근할 때는 $a^x$는 $0$으로 한없이 가까워진다. 따라서 $f(x)=a^x$는 감소함수이다.

**6.4** 지수 함수 $f(x)=a^x$의 그래프는 (1) $0<a<1$인 경우 (2) $a>1$인 경우가 있다.

**6.5 보기** 네 개의 지수함수 $2^x, 3^x, (\frac{1}{2})^x, (\frac{1}{3})^x$의 그래프를 한 좌표축에 그리시오.

**6.6 보기** $f(x)=3-2^x$와 $g(x)=\frac{1}{2}e^{-x}-1$의 정의역과 치역을 구하고 그래프를 그리시오.

**6.7 지수함수의 중요 성질**

(1) $a^0 = 1$ 이므로 $f(x) = a^x$ 의 그래프는 항상 $(0,1)$ 을 지난다.
(2) $f(x) = a^x$ 의 정의역은 실수 전체 집합이고 치역은 양의 실수인 $(0,\infty)$ 이다.
(3) $a > 1$ 이면 $f(x) = a^x$ 는 증가함수이고, $0 < a < 1$ 이면 $f(x) = a^x$ 는 감소함수이다.

앞 절에서 지수함수 $f(x) = a^x$ 는 증가 또는 감소이므로 일대일함수가 된다는 것을 알았다. 따라서 $f$ 의 역함수 $f^{-1}$ 가 항상 존재한다. $f$ 의 정의역은 $\mathbb{R}$ 이고 치역이 $(0,\infty)$ 이므로 $f^{-1}$ 의 정의역은 $(0,\infty)$ 이고 치역은 $\mathbb{R}$ 이다. $f(x) = a^x$ 는 $a$ 와 지수 $x$ 에 의해 결정되는 함수이므로 그 역함수 또한 $a$ 와 $x$ 에 의해 결정되는 형태로 정의하면 편리할 것이다. 이러한 점을 고려하여

$$f^{-1}(x) = \log_a x, \quad x > 0$$

으로 정의한다. 이 역함수 $f^{-1}(x) = \log_a x$ 을 밑이 $a$ 인 로그함수라 하다. 여기서 밑 $a$ 는 $1$ 이 아닌 양수이다.

**6.8** 지수 함수의 역함수로서의 로그 함수 $\quad y = \log_a x \iff x = a^y$

예를 들면, $2^3 = 8$ 을 다시 쓰면 $3 = \log_2 8$ 과 같다.

**6.9 로그함수의 중요 성질**

(1) $f(x) = \log_a x$ 는 $(1,0)$ 을 항상 지난다.
(2) $f(x) = \log_a x$ 의 정의역은 $(0,\infty)$ 이고 치역은 $\mathbb{R}$ 이다.
(3) $a > 1$ 일 때 $f(x) = \log_a x$ 는 증가함수이고, $0 < a < 1$ 일 때 $f(x) = \log_a x$ 는 감소함수이므로 $f(x) = \log_a x$ 는 일대일함수이다. 따라서 $\log_a u = \log_a v \implies u = v$ 가 성립한다.
(4) $\log_a(a^x) = x \quad , \quad a^{\log_a x} = x$

**6.10 보기** 다음과 같이 정의된 로그함수의 그래프를 그리시오.
(1) $f(x) = \log_2 x$ (2) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

풀이: (1) $f(x) = \log_2 x$ 는 $y = 2^x$ 의 역함수이므로 그래프는 $y = 2^x$ 의 그래프를 그린 후 $x = y$ 에 대해 대칭 이동하여 그린다.

(2) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ 는 $y = (\frac{1}{2})^x$ 의 역함수이므로 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프는 $y = (\frac{1}{2})^x$ 의 그래프를 $x = y$ 에 대해 대칭 이동하여 그린다.

### 6.11 로그 법칙

(1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

(2) $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$

(3) $\log_a(x^r) = r\log_a x,\ r \in \mathbb{R}$

(4) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

증명: (1) $\log_a x = X$, $\log_a y = Y$라 놓으면 $a^X = x, a^Y = y$이므로 $xy = a^X a^Y = a^{X+Y}$이다.
따라서 $\log_a(xy) = X + Y = \log_a x + \log_a y$.

### 6.12 보기 $\log_2 80 - \log_2 5 = 4$

### 6.13 상용로그와 자연 로그

우리는 $10$진법을 사용하므로 밑 $10$의 로그가 계산에 매우 편리하다. 밑이 $10$인 로그를 상용로그라 한다. 상용로그 $\log_{10} x$는 간단히 $\log x$로 쓴다. 인구의 성장과 감소 또는 자연현상의 많은 문제에서 자연지수 $e$을 밑으로 하는 로그를 주로 사용한다. 이러한 로그를 자연로그(natural logarithm)라 한다. $x$에 대한 자연로그 $\log_e x$을 간단히 $\ln x$로 쓴다. 즉,
$\log x = \log_{10} x$, $\ln x = \log_e x$ 이다.

Note. (1) $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

(2) $e^{\ln x} = x$ , $\ln(e^x) = x$ , $\ln e = 1$