

HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Proccedings of the conference on New Aspects of High-dimensional Nonlinear Dynamics
Author(s)	Yamamoto, Tomoyuki; Sato, Yuzuru; Kataoka, Naoto et al.
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 118, 1
Issue Date	2007-01-01
DOI	https://doi.org/10.14943/25706
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/28022
Type	departmental bulletin paper
File Information	NAND-proc1.pdf



Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

研究会 「大自由度力学系研究の新展開」報告書

2006.6.27-6.30 北海道大学遠友学舎

研究会「大自由度力学系研究の新展開」(2006.06.27-06.30)
報告書

１. 趣旨

本研究会は、大自由度非線形現象に対する新たな視点を共有することを目的として立ち上げられた。大自由度力学系理解のための機軸を打ち出すことが最終的な目標である。新たな切り口を探ることは勿論であるが、これまでに提唱されはしたものの未整理のままとなっている概念を定式化することも目的としている。なお、以降派生させる研究会の前段階としての位置づけから、本研究会は参加者を事前に限ったものとしてお願いした。

２. 研究会の内容

本研究会では、大自由度系内に現れる小自由度系、またその出現と消失という視点を基調とした。これは、大自由度系の全体的骨格の理解という最終目標へ、小自由度系間の移り変わりという視点から接近しようとする作業仮説的設定である。また、近年巨大化しているデータベースに対する理論的態度の検討をもう一つの基調と据えた。

研究会の性質上、発表者にはその研究分野の概観を主として依頼した場合がある。 i) 過去の同系統の研究会の来歴 [山本]、ii) 生物、脳の情報処理に対する数理的取り組み [藤本、伊藤]、iii) 近年の大自由度理解の進展 [佐藤] がそれに当たる。

個々人の取り組みとしては、人間の運動系 [山本] 、結合振動子系の遍歴現象 [茶碗谷]、生物細胞における揺らぎの理論 [藤本]、脳における半記号的情報処理 [伊藤] 、データベースの統計 [行木] 、細胞数調節の力学系的性質 [中島]、自由度変化力学系 [片岡] 等を配し、基調からの肉付けとした。

３. 結果

歴史的概観においては、定式化が未整理の為に共有されず忘れられた概念が多く存在することが認識され、これについてはともかくも資料としての伝承が必要であるとされた [山本] 。個々人の研究においては、旧来概念からの着実な進展や、新たな形のモデルの提出、議論などが行われたものの、標語的に用いうる一般概念までの到達には到らなかった。

実験から得られた相空間の構造に対する示唆や、脳情報処理の捉え方に対する提案、化学反応ネットワークの構造と力学系的性質等が提出された取り組みである。また、力学系を直接設計することにより、大自由度系内で出現するべき小自由度系、またその生成消滅する様式を直接捉えようとする試みも提案された。

本研究会では、それぞれから見た大自由度系の性質を共有するに留まったが、この共有の結果から、以降の拡大した継続による大自由度系研究の進展を期待したい。

４. まとめ

現在着実に蓄積され続けている各種のデータベースは、生物や脳といった大自由度系の数理的理解を進めるための貴重な材料である。しかしその蓄積が作業的なものとなれば、従来通りの理解に基づいた実測データを積み重ねていくことが、対象を理解するということであるという理論化への拒否へも転じかねない。

本来的に観測データと数理的理解は、相互に協調して積み上げられるべきものである

が、現状は各種観測技術の急速な進展に対し、理論側が追随しきれていない状況にあるとも見える。このような現況は一時的なものであるとする為にも、大自由度系に対する数理的な切り口と、それに立脚した実験の提唱が急務であると思われる。

その為にも、分野横断的な大自由度系の研究会の存在は不可欠であり、新展開へ向けての研究の着実な積み重ねから求心力のある概念の提出を試み続けたい。

研究会への資金提供を頂いた北海道大学電子科学研究所に感謝いたします。

世話人
山本知幸、佐藤譲、片岡直人、高木拓明

研究会「大自由度力学系研究の新展開」プログラム

6 月 27 日
16.00-17.00 山本知幸 趣旨説明と複雑系の歴史について

6 月 28 日
10.00-12.00 山本知幸 「大自由度力学系としての身体運動」
13.30-15.30 茶碗谷毅 「ＧＣＭ系でみられる準安定状態と遍歴現象」
16.00-17.00 中島昭彦「力学系の設計方法」
17.00-18.00 片岡直人「自己参照–自己韜晦風に」

6 月 29 日
10.00-12.00 伊藤淳司 「力学系は情報を表現するか?」
13.30-15.30 藤本仰一 「post Genome 時代の分子生物学研究」
16.00-17.00 佐藤譲 「大自由度力学系とアナログ計算」
17.00-18.00 行木孝夫 「post Google 時代の研究手法：研究のネットワーク解析」

6 月 30 日
10.00-12.00 片岡直人+石原秀至 (議論)
12.00- 総括 (高木) 兼昼食会

参加者リスト

世話人
山本知幸 (北陸先端大 知識科学研究科), 佐藤譲 (北大 電子研), 片岡直人 (東大 総合文化研究科), 高木拓明 (阪大 生命機能研究科)

参加者
行木孝夫 (北大数学科), 並川淳 (理研 脳科学センター), 立川正志 (東大 総合文化研究科), 藤本仰一 (東大 総合文化研究科), 石原秀至 (基生研), 黒田茂 (北大 数学科), 伊藤淳司 (理研 脳科学センター), 茶碗谷毅 (阪大 情報科学研究科), 中島昭彦 (阪大 生命機能研究科)

目次

山本知幸「複雑系の歴史」 ··· 6

山本知幸「大自由度力学系としての身体運動」 ··· 12

茶碗谷毅「ＧＣＭ系でみられる準安定状態と遍歴現象」 ··· 17

中島昭彦 「力学系の設計方法」 ··· 35

片岡直人 ”Graph Automata and Degree of Freedom” ··· 40

伊藤淳司 「力学系は情報を表現するか?」 ··· 56

藤本仰一 「細胞ダイナミックス研究の現状」 ··· 60

行木孝夫 「Post Google 時代の研究手法 — 研究のネットワーク解析」 ··· 68

(注 講演時から題目を変更している場合があります)

複雑系の歴史

山本知幸
北陸先端科学技術大学院大学 知識科学研究科
t-yama@jaist.ac.jp

1　はじまり

複雑系というムーブメントは、日本では 1990 年代初頭に始まった。公刊された文書では、雑誌「数理科学」（特集：複雑系の科学）1991 年 6 月号の特集タイトルであると思われる。伊庭幸人による記録 [1] によると、1989 年の統数研での研究会「冬の学校」では Complex Systems という言葉が使われており、まだ日本語の「複雑系」ではなかった。Wolfram は 1982 年に ”complex system research” という言葉を考案しており [2]、Center for Complex Systems Research を 86 年に設立している。Santa Fe Institute は 84 年設立であり、米国では 80 年代前半には立ち上がっていた。米国の流れについては一般向けに本も出版されているため割愛する [3]。本稿で述べるのは日本の複雑系についてである。

日本の複雑系は、大自由度カオスをきっかけとしている。以前から金子邦彦は CML(Coupled Map Lattice) の研究を始めており、京大基礎物理学研究所 (以降基研と記す) で開催されていた研究会「カオスとその周辺」などで発表をおこなってはいたものの、独立して研究会を立ち上げるにまではなっていなかった。1990 年付近にカオス的遍歴という現象は発見されており、大自由度カオスの現象論を突き詰めることで、多くの系に共通な普遍的な現象のクラスを見つけることができるのではないかという機運が立ち上がってきた。とくに生命現象や脳など、取りつく島もなかったような対象に対して構成論的手法などを用いて立ち向かう。大自由度カオスは、そのための強力な道具であった。

2　複雑系とは

「複雑系」という言葉の定義は、あまり陽に議論されてこなかった。概念が輸入のものであったからかもしれないが、定義付けのために陽に努力をした形跡はみられない。筆者の主観だが、むしろ、矢継ぎ早に仮説生成をし続けて、それが実験的に確かめられた後に定義が浮かび上がると考えていた節がある。少なくとも、金子と津田による「複雑系のカオス的シナリオ」[4] では、明示的には示されおらず、「本シリーズを通して複雑系の輪郭をはっきりさせたいと望んでいる」と記すにとどまっていた。

筆者の定義は、カオスや揺らぎといった非線形現象をもとにして、様々な現象の普遍則を導き出す運動、というものであるが、これにしても、「運動」の中身には触れていない。それは、現在にいたるも複雑系とは仮説の構築と検証の苦闘の連続の歴史であるからである。

しかしこの状況は、研究の運動から「研究分野」として成熟するためには不可欠な、柱となるべき明示的に書かれたコンセプトを欠いていることになる。

3　背景

話を 80 年代に戻す。複雑系のきっかけとなったカオスであるが、Lorentz の先駆的な研究をはじめ、カオス自体はそれ以前から注目され、フラクタルとともに一種のブームになっていた。筆者は高校生のとき「(日経) サイエンス」連載の Dewdney「コンピュータレクリエーション」でカオスを知った。読み物としてグリック「カオス」は 1991 年に翻訳出版 (原書は 1987 年) された。

1990 年の合原一幸編「カオス」(サイエンス社)[5] は、日本語で書かれたカオスに関する単行本としてはほぼ最初のものであった。複雑系に直接つながる一般向け読み物としては 1990 年に津田一郎「カオス的脳観」[6] が刊行された (ただしここにもまだ「複雑系」という言葉はなかった)。この本を読んでカオスや脳に興味を持ったという人がかなり見受けられたので、この本の果たした役割は大きかったといえる。この本以降も、研究者による一般向け読み物が出版されたものの、読みやすさわかりやすさという点ではこの「カオス的脳観」の存在は大きい。

これらのカオス研究は、おもに小自由度系であった。計算機が安くなる (当時は高価で貧弱な PC か大型計算機センターのマシンを有料で使用していた) につれ、研究者の個人的な興味で (つまり予算を獲得しなくても) も多くの計算量を確保することが可能になり、大自由度系の研究が現実的になってきた。そして、解けるかどうかもわからない投機的な研究も可能になった。[1]

複雑系の対象の大きい分野を占めていたものに、生命現象がある。物理学者が生命に興味を持つのは新しいことではない (例えば Schrodinger が遺伝を媒介する物質の存在を予言している。寺田寅彦による考察や Turing のチューリングパターンは、それらの先駆である。非線形科学との関連では、清水博のバイオホロニクス [8] が挙げられる。Haken 流の自己組織化の考えをもとに生命システムの情報的機能の解明をめざしたものである。筋肉繊維の流動セルにおける協同現象を発見した実験的研究や振動子の同期によりコードされたコンピュータの開発などを目指した研究など、先駆的な研究を行っていた。

これらにより、複雑系への道は開かれていたといえる。しかし、欠けていることがあった。それは、現象論的普遍性とでも呼ぶべきものである。物理系の科学では、伝統的に原理への執着が強かった。基礎方程式に帰着しないものは現象論と呼ばれ、原理に立ち返って基礎づけることが出来ないゆえに普遍性を持たないとされ、低く見られていた。しかし、複雑系では現象論を突き詰めた先に普遍性があるとして、主客を逆転してしまった。この態度は、当時としては異質であり、現在に至っても一般に容認されているとはいえない。しかも、その普遍性自体研究の対象であるために、明示的な目標を書き下すことができていない。科学として成立するためには、何か一つでも研究が完成した後でしかありえないという、苦闘が運命づけられた方法論である。むしろ運動といった方がいいかもしれない。それでも、生命現象のような分解して明解に理解出来ないような現象に立ち向かうには、この方法しかないと、期待されていた。

4　始動

1992 年より 1999 年にわたって、ほぼ毎年 (97,98 年は休み) 基研において研究会「複雑系」シリーズが開催された (以降「基研複雑系」と記す)。研究者の間に複雑系を広めるきっかけになった。第 1 回 (「基研複雑系 1 」と記す。第 2 回以降も同様) のプロ

[1] 余談になるが、Shaw は「水滴系のカオス」[7] では、1980 年代当時としてはデジタル計算機よりもかなり安かったアナログ計算機を用いて、水道の蛇口のポタ漏れのモデルという研究を進めようとしていたが、低予算の研究でありながら官僚らの理解を得られなかったことを嘆いている。現在では、廃棄処分になるほど古い PC でも小自由度カオスには十分な能力を持っているのは歴史の皮肉である。

グラムは金子邦彦・池上高志・津田一郎といった中心人物たちの他、四方哲也・澤口俊之・正高信男といった生物系、安富の経済など異分野の人を多く取り入れた。非常に刺激をうけた反面、勉強会的な性格を持ってしまうという問題もあった。これは基研複雑系の最後まで尾を引く問題である。

なお、複雑系 1 の金子による案内メールにあった「複雑な現象を単純化せずにとらえること」という言葉は、その後「(複雑系とは) 複雑なものを複雑なまま理解 (することである)」として一人歩きをし、題目とされることがよくあった。単純化しないことと複雑なままにすることの差は、大きいが明示的に書けるものではないため、複雑系の目的が曖昧なまま受け取られる一因となった。現象論的普遍性という言葉もまだ存在しなかったか、広く使われていなかったようである。

基研複雑系 1 の会場は熱気に包まれていた。新しいものをつくろうという気負いのゆえか、多くの概念が噴出するかのごとく繰り出された。それらは作業仮説のつもりであったと思われるが、現在では別の概念に置き換えられたり、ほとんど使われることがなくなったものも少なくない。いくつか例を挙げると、「多対多の因果律」「進化・共進化 (ホストパラサイト系)」「内と外」「記述不安定性」「内在物理 (内部観測)」などである。これらの語を含め、複雑系では多くの語が作られ、使用された。その多くは、ジャーゴンと化したため、敷居の高い印象を外部に与えてしまったという問題につながる。なお研究会報告は基研発行の『物性研究』(vol.59 No.3(1992/12)) に掲載された。メール討論も収録されているので当時の雰囲気をかいま見ることができる。

雑誌「科学朝日」93 年 3 月号 (現在は休刊) に複雑系の特集が組まれた。金子、池上、多賀、柳田達雄が取材を受けた。これらの出来事から、92 年度は、複雑系が社会的に認知された年度と考えられる。

すでに Langton により人工生命 (Artificial Life) の会議もはじまっていた (1987,1990-隔年)。ヨーロッパでは、SAB(Simulations of Adaptive Behavior 1990-隔年) が活動を始めていた。この会議は From Animals to Animats という副題を持っている。また、ECAL(European Conference on Artificial Life 1991-隔年) も同様である。また、bioinformatics は現在統計解析の言葉としてうけとられているが、Hogeweg がその名称を使い出した本来の意味では、生命の情報的現象をモデルによる再現と、統計的に解析の両方向があった[2]。

5 発展

前述の通り、基研複雑系シリーズは 1992-1999 年開催された。

もとより中心人物たちは生命現象を指向していたこともあるが、生物の実験系の研究者とのつながりも発展した。フォーマル・インフォーマルを問わず、多くの研究会が開かれていた。マスコミにも取り上げられ、複雑系に関する本が出版されたり、雑誌の特集も数多く組まれた。

とくに生物において「多対多の関係性」ということを見いだそうとしていた。当時はまだヒトゲノム計画がまだ進行中の段階であったが、病気などを遺伝子に帰着して研究終了という風潮は既にはじまっていた。遺伝子の発現は「統計的に有意なスイッチ機構」であるという前提は常識となっているが、明確に見えるデジタル機構は、研究者本人も知らないうちに「確実なスイッチ機構」と思い込みがちで、理論やストーリーを組み立てる際に、ランダムネスを排除してしまうことがよくある。それらに対抗する概念が「多対多の関係性」であるが、気分的には多くの人の共感を得るも、決定打となる研究をだすべく苦闘中というが現状である。

[2] もとは Hogeweg が自分の所属として使った言葉で、これはオランダ語では bioinformatica であり、bioinformatics 研究所と bioinformatics 研究者の両義である

また、認知、経済との交流も生まれた。共同研究を行っているグループもあるが、分野の枠を超えた研究が出てきたことは重要である。例えば、経済において、安富歩は貨幣の成立に関するモデルの研究を論文誌に発表した [9]。また、認知では谷淳がロボットにおける認知の問題を継続的に研究している。研究の枠組みが広がり、学際的な交流が起きていたのがこの時期の雰囲気である。

いくつか主要な出来事を列記する。

王子セミナー「複雑系」T.Ray、P.Hogeweg、W.Fontana、W.Freeman、O.Rössler、J.Crutchfield M.Conrad、 北野宏明などの顔ぶれ。統計物理では久保亮五、鈴木増男なども参加していた。カオスの縁、生態系、人工生命、内部観測などの話題。

野沢による結合写像系のニューラルネットワーク (通称「野沢マップ」) は、巡回セールスマン問題に対してよいパフォーマンスを示したため、工学において大いに注目を集めた。民間企業に所属していた野沢は工学的応用を目指し、自ら会社を設立して現在までカオスを応用した製品を開発している。

基研複雑系 2(93 年) はネットワーク (脳、生態系、タンパク質) と進化に関する話題が中心。最終日午後にはパネルディスカッション「モデルの作り方と評価を巡って」があった。これはモデルから研究を出発する方法論に関して議論しようとしたものである。上述の通り、普遍性を発見しないことには基礎付けが出来ず、基盤 (基礎) がないと研究の連携がとれず、ということもあり研究会では「一人一モデル」といわれるほどの乱立状況であった。その分、ポスターセッション (第 5 回まで連続) は常に活気に満ちていたことも確かである。

基研複雑系 3(94 年) は数学的な複雑性と計算に関する話題と内部観測について「内と外」と題されたセッションがあった。全体的にやや勉強会的な傾向が見られた。実際、このころから会を続けることに関して議論があった。ただし、研究自体は発展していたが、まだ「複雑系」をこえる名前を付けるだけのレベルには達していないという、微妙な煮詰まり感はあったのかもしれない。

94 年 12 月には筆者が橋本敬、山口明宏と協同で研究会「動的システムの構築と記述のために」を開催した。認知、ロボット、計算という話題の他、高山宏による「表」的思考の歴史とその限界についての講演は、表 (テーブル) に代表される還元論思考がヨーロッパ近代からの伝統であり、手強いことを示した。また、島田一平が科学史における複雑系の位置づけに関する講演をした[3]。

基研複雑系 4(95 年) は化学反応とゆらぎ、認知と発達に各 1 日をあて、最終日には「力学系アプローチの可能性と限界」というタイトルで議ディスカッションに多くの時間を割いた。

札幌では、北大数学科で津田、辻下徹らにより複雑系の研究会が開かれた (1994 年-1999 年度)。年複数回開催。複雑系と数学の関連する領域、内部観測や脳をはじめとし、広い領域のトピックを扱った。

1996 年 6 月複雑系叢書刊行開始。第 1 巻「複雑系のカオス的シナリオ」[4](英訳 2000 年 [10])。また第 2 巻「複雑系の進化的シナリオ」[11] は 1998 年 7 月発行。

基研複雑系 5(96 年) は 4 セッションにわかれ、認知、脳、大自由度力学系、人工生命となっていた。一度休止を挟み、基研複雑系 6(99 年) が最終回となった。これは津田・池上の発案により Turing の業績を記念して、(Turing's) Machine, Pattern, Test の 3 本に柱を分け、それぞれディスカッションを行う、という形式になった。

[3]残念ながら記録が残っていない

6　現状

基研複雑系が終息して後、とくに大学院生の世代での交流が希薄になりつつあった。99 年と 2000 年に東大駒場で研究会「東京複雑系」が開催された。これは、ポスターセッション主体の集まりである。これ以降、「複雑系」を標榜した定期的な会議は開かれなくなる。複雑系の研究者が参加する会議は多くあるものの、基研複雑系のような中規模で内容も比較的自由のものではなく、多くはプロジェクト主催や大規模な会議であり、結果が固まったものしか話しづらくなっている。上述のような場がなくなったことは残念だが、新たにどのような動きを作ろうかというアイデアがまだない。

問題は、まだ分野全体としての概念の固定に成功していない以上、多くの研究のエッセンスは、明示的な言葉の形になっていないコンセプトやアイデアを抜きにしては伝えることができないということである。それゆえ世代を経るにつれパイオニアたちの精神が忘れ去られることには対抗出来ない。そのため、これまでは感覚的にしか語ってこなかったアイデアを、まとめてテキスト化して、再現・伝達可能にする必要がある。Google による検索でも、最初のページには、研究者のページに行き当たらないということは、やはり問題で、情報を整備出来ていないことになる。

実のところ、基研複雑系終息後にはいくつかの大きな出来事があった。ヒトゲノム計画の完了、Google に代表されるウェブ情報の「実用」化、ホンダによるロボットによる 2 足歩行の実現。これらに共通することは、計算機 (や自動機械) の brute force 的な使い方でブレイクスルーを達成したということである。複雑系の意義付けで時々見られた「還元論的な考えでは、複雑な対象を理解するのは不可能」という安易な理論武装はもはや通用せず、実のある議論をする必要がある。

実際のところ、近年になって計算量が膨大に稼げるようになったにもかかわらず、大自由度力学系の理解に関するブレイクスルーは見いだされていない。研究者が個々の応用をにらんだ領域に散り、各論に走っているきらいがある。実際筆者も把握しきれていないので、一度全体を概観したいと考えている。価値観の多様さを受容すること、は 21 世紀の社会が飲み下さなくてはいけない問題であるが、複雑系の場合は多様化を遮二無二突き進んできたきらいがある。分野の豊かさにおいて、研究の多様さと価値観の多様さは相反の関係にあると考える。その意味で、複雑系は転換期にある。

7　価値観と今後

複雑系を定義することは難しい。最初のうちは、提唱者たちも明示的な定義付けを避けていた。明示的な対象はないにせよ、運動として非線形力学系の現象論から得られた普遍性から、物理現象を再定義するということは、これまでにあった定義を書き直すということである。短いながらも歴史を概観してみると、その運動の根底には反抗精神があったように思える。

基研複雑系 1 の案内にあった「複雑なものを単純化せずにとらえること」は還元論とは別の方法論を作り出すことを意図したものであったが、その叩き台としての試行であったはずの還元論との対立が「単純化する方向ではわからない」としてクローズアップされてしまったようである。

「ミクロスケールとマクロスケールのダイナミックな循環」(例えば [12])、という概念も提案されているが、これはまだその結果としてもたらされる現象を明示的に記述できていないため、まだ作業仮説の段階である。しかし、現場としてはつねに「喉に何かが詰まっている」スリリングな状態であることも確かである。実際のところ、予想が正しいかすら確かなことではなく、理論の論理自体ひっくり返らないとも限らない。

このように主客を逆転した上で転倒しかねない価値観を引っ掻き回すのは、草創期にしか許されないはずである。それゆえ、今後は仮説や概念の取捨選択した上で、それぞれ検証を行い基礎固めをする一方で、発見されるべき普遍性が何であるかを模索して行くことになると考えられる。

References

[1] 伊庭幸人. 複雑系研究会の歴史. http://www.ism.ac.jp/~iba/fukuzatsu.hist.html.

[2] Stephen Wolfram. The Stephen Wolfram scrapbook: A time line. http://www.stephenwolfram.com/scrapbook/timeline.html.

[3] Mitchell M. Worldrop. *Complexity: The Emerging Science at the Edge of Order and Chaos*. Simon & Schuster, 1992. 邦訳「複雑系」新潮社 1996, 新潮文庫 2000.

[4] 津田一郎 金子邦彦. **複雑系のカオス的シナリオ**. 朝倉書店, 1996.

[5] 合原一幸, editor. **カオス-カオス理論の基礎と応用**. サイエンス社, 1990.

[6] 津田一郎. **カオス的脳観—脳の新しいモデルをめざして**. サイエンス社, 1990.

[7] Robert Shaw. *The Dripping Faucet as a Model Chaotic System*. Aerial Press, 1984. 邦訳「水滴系のカオス」佐藤譲、津田一郎訳 岩波書店 2006.

[8] 清水博. **生命を捉えなおす—生きている状態とは何か**. 中公新書, 1990.

[9] Ayumu Yasutomi. The emergence and collapse of money. *Physica D*, 82:180–194, 1995.

[10] Kunihiko Kaneko and Ichiro Tsuda. *Complex Systems: Chaos and Beyond, A Constructive Approach with Applications in Life Sciences*. Springer, 2000.

[11] 池上高志 金子邦彦. **複雑系の進化的シナリオ—生命の発展様式**. 朝倉書店, 1998.

[12] 金子邦彦. **生命とは何か—複雑系生命論序説**. 東京大学出版会, 2003.

大自由度力学系としての身体運動

山本知幸
北陸先端科学技術大学院大学 知識科学研究科
t-yama@jaist.ac.jp

1 はじめに

人間や動物の全身運動や歩行ロボットの振る舞いを力学を使って理解し、また運動を設計したいというのが本研究の動機である。しかし、身体運動を大自由度力学系として扱おうとするのは、厳密に行うのは困難である。その理由は、まず自由度が大きく、リンク系として扱うのであれば、変数相互の依存が大きいこと。また、足の踏み替えや衝突など境界条件が時間に依存すること。さらに、地面などとの接触のモデリングが困難なことなどである。しかし、運動において最も重要なのは、運動の詳細ではなく、目的とするタスクが実行出来るか否かである。多くの場合、相空間の厳密に決められたある一本の起動を精密にトレースしなくてはならないという訳ではなく、ある程度の幅を持った領域に収まっていれば十分である。そのため、本稿では、制御という言葉を「目的とする領域に運動を導く」という意味で使い、工学的な意味での制御を「精密な制御」と呼ぶことにする。

例えば、2 足歩行は、成人の人体サイズのヒューマノイドロボットでは 97 年にホンダ技術研究所が実現した [1] が、これは本質的にはあらかじめ決められた理想的な軌道のプレイバックであり、誤差を修正するための計算と制御のために多くのリソースを必要としている。しかし、もっと単純な「おもちゃ」のような機械であれば、McGeer が 80 年代に passive dynamic walker として坂を下る 2 足歩行を、制御なしで安定に実現している [2, 3]。これは、重力による倒れ込みと、遊脚と地面との接触による反力を利用して、並進 (speed mode)、回転 (roll mode)、上下動 (totter mode) の三者の相互作用により安定性を得ているものである。この機械は外乱に対してもロバストネスをもつ。ただし、これは位置エネルギーを利用するために、平面では歩くことはできない。

平面上で歩く機械は、Wisse らにより空気筋肉を使って脚のスイングを補助することで実現された [4, 5]。空気筋肉は軽量であり時間的レスポンスが良いのが特徴であるが、非線形性が大きく、力や長さの精密な制御には向かない。しかし、この機械は多少の凹凸には対応出来るていどのロバストネスを示した。彼らが見いだしたことは、この機械の制御において、力の大きさよりもタイミングに敏感であるということである。歩行のような不安定な運動においても、全域が不安定という訳ではなく重要な領域・変数にのみ注意深く制御を行えば求めるタスクは実行出来るということをこの研究は示したと考えられる。

このように、身体のもっている力学をうまく利用 (exploit) して制御を省いて運動を実現しようとする考え方がある [6]。多くの場合は、個々の運動についての研究であるが、筆者らは、身体運動を一般的に扱う方法を考えている。そのもとになるコンセプトは Global Dynamics と呼ばれ、次章で解説する。

2 Global Dynamics(大域動力学)

Global Dynamics(大域動力学)[7, 8, 9] とは、身体のもつ動力学的な性質を最大限に利用し、制御系の介入を最小限にするための力学的な基盤である。図 1 にそのアイデアを示した。こ

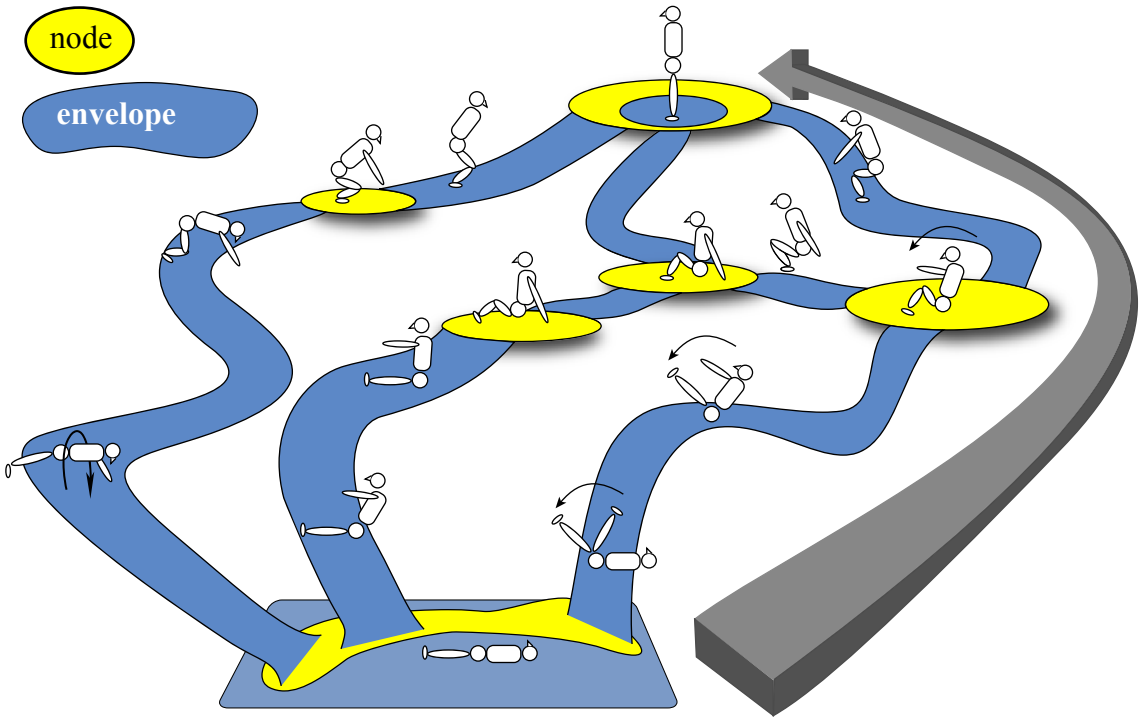


Figure 1: Global Dynamics の模式図

れは起き上がりに関する力学的な構造を示したものである。寝ている状態から立ち上がるまでには複数の経路があり、それぞれの経路は相空間内に離散的に存在する。それぞれの経路に関し、図中で青で示されている経路は安定性をもち envelope と呼ぶ。envelope を複数組み合わせて運動を構成するが、envelope の接続においては黄色で示した不安定な領域を通過する必要がある場合があり、この領域では制御が必要である。この領域を node と呼ぶ。運動全体の空間は、node でつながれた envelope のネットワークであるととらえることができる。

envelope はその安定性の定義に応じ、kinematic stability と passive stability の 2 種類ある。前者は接地点の変化がなく、安定性を保つ条件が機構的に書ける場合である。例えば直立時では、ZMP(Zero Moment Point[10]: 静止時は重心の地面への投射点と一致) が接地点の作る多角形の内部にあれば倒れることはない。この条件を維持するような関節角度間の協調ルールをつくり、それに従えば高次の制御入力は不要である。ただし、ここでいう高次の制御入力とは脳を介したフィードバックが必要なものをいい、反射的に可能な制御は含めない。後者は、スイングや回転など、動的な状態で、力学的な安定性があり外乱があっても運動のパターンが変わらない場合である。ここでは、安定性により軌道は予測可能であるため、適切な初期条件を設定すれば、運動中の制御は必要ではない。

つまり、高次の制御系 (人間の場合は脳神経系、ロボットの場合はフィードバック・プランニングを伴う計算) の介在は、envelope 内では必要ではない。それが必要になるのは、envelope を乗り換える、node 領域においてである。目的とする経路が決まっている場合など、次に向かうべき envelope が決まっていれば、それに向けて初期条件を与えるべく制御を加える領域である。node に適しているのはサドルなど不安定性を持つ領域である。力学的な不安定性を利用すれば、効率よく envelope の乗り換えを行うことができる。

このように考えると、身体のもつ力学的に安定な運動の組み合わせによりタスクを実現することができる。また、常に高次の制御系が働いているのではなく、必要な領域にのみ集

中して力学への介入を行うことで、運動を実現する。この考え方の利点は、身体の力学と制御の間の干渉を防ぐことが可能になっている点である。とくに人間のアクチュエーターである筋肉は非線形性やヒステリシスを持ち、精密に制御しようとすると逆に誤差の集積により振動的な発散を招きやすい。神経系の伝達遅れも、リアルタイムでのフィードバック制御を困難にしている。そのため、前もって制御をプログラムしておくフィードフォワード制御が要求される。たとえば川人のように精密なフィードフォワード制御を学習によって実現するという理論 [11] を否定するものではないが、本稿では粗い制御でもタスクは実現可能であるということを強調したい。

このコンセプトは、人間の起き上がりのモーションキャプチャを利用した測定により検証された。前転をしてダイナミックに起き上がる起き方 (図 1 で右端の矢印で示した経路) では、支持点を移す領域が node になっているが、力学的に不安定であるにもかかわらず、その点において複数トライアルを重ね書きした軌道の幅が収束していることが示された。この特徴は、この領域で制御が強く入力されていることから、node における集中的な制御が行われているという予想と一致している [12]。

3 Rolling Box モデル

上のコンセプトを力学的に表現するために、Rolling Box モデルを提案した [12]。地面の上に立つ身体は、支持面 (点) と重心で運動を記述できるが、これを「箱」とみなすことにする。図 2 に相図を示した。B が箱の相図である。箱は面接触であるが、剛体であると仮定すると傾いた場合は接地点によりそれぞれ倒立振子とみなすことができる。面接触を特殊な場合とみなし、この状態を境に接地点が切り換わると考える。この切り換わりにより影響を受けるのは、座標系である。箱の運動は接地点に依存し、それぞれ面接触時のオフセットを境界条件とする異なる座標系で表現できると考えることができる (図 2B)。つまり、箱を地面の上で回転させると、面接触時を境にして、座標系が切り換わる。なお、運動により座標系が切り換わることは、座標系を貼り合わせ (splice) ていることに相当する (図 2C)。座標を貼り合わせている面を 接続面 (surface of splicing) と呼ぶ。

座標系の貼り合わせにより、新たな特異点が出現する。相図の上で、軌道は稠密であるため、ある軌道はかならず別の軌道か特異点に接続する。ここで注目するのはセパラトリクス (separatrix) の接続先である。オフセットが対称でない場合など、必ずしもセパラトリクス同士が接続することはない。つまりホモクリニック軌道が特異点に接続しない軌道に接続する (図 2C 太線)。このようにあ軌道がセパラトリクスと接続した場合、元の座標系では特異点と接続していなくても、実質的にセパラトリクスになる。これを疑セパラトリクス (pseudo separatrix) と呼ぶことにする。

箱の回転の場合、pseudo separatrix をまたいで箱が回転し続けるか、向きを変えて振動するかに分けることができる (図 3)。また、人間の場合は、この点で簡単な制御を加えることで、回転を止めて立ち上がるか、回転をし続けるかを選択することができる。具体的には、脚を伸ばすことで接続先 (足接地) の座標系のオフセットを増大させ、接続面を移動することである (図 3B)。オフセットが増大すると、接続先ではセパラトリクスの接続面における切片の絶対値も増大し、回転を止めることができる。逆に脚を縮めると回転を続くように制御することも可能であるが、脚の格納できる角度には制限があることが多いので、制御の幅に限度がある。

座標系の貼り合わせにより、相空間の構造には分岐に似た変化が現れる。ここで示した例の場合はサドル 1 個がサドル 2 個とセンターになり、ポアンカレ指数は保存する。ただ他の貼り合わせでもこの条件が維持されるかはわかっていない。また、一般に軌道は接続するが、軌道の導関数は必ずしも連続でない。このため、衝撃力が発生することがある。

このモデルは重心の運動と接地点の変化に注目しているため、内部自由度の運動が本質的である運動には適用できないが、重心の移動が本質的である運動には有効である。運動の

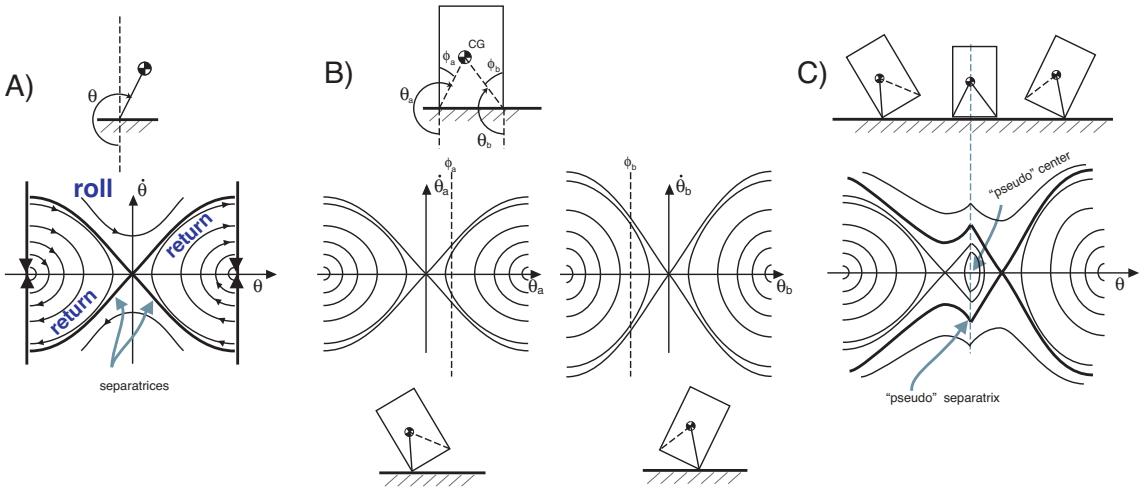


Figure 2: 相図の模式図。A:地面上の倒立振子。B:箱の場合。面接触時を境にして、接地点に応じて座標系が切り換わる。C:両者を接続した相図。分岐に似た構造が現れる。

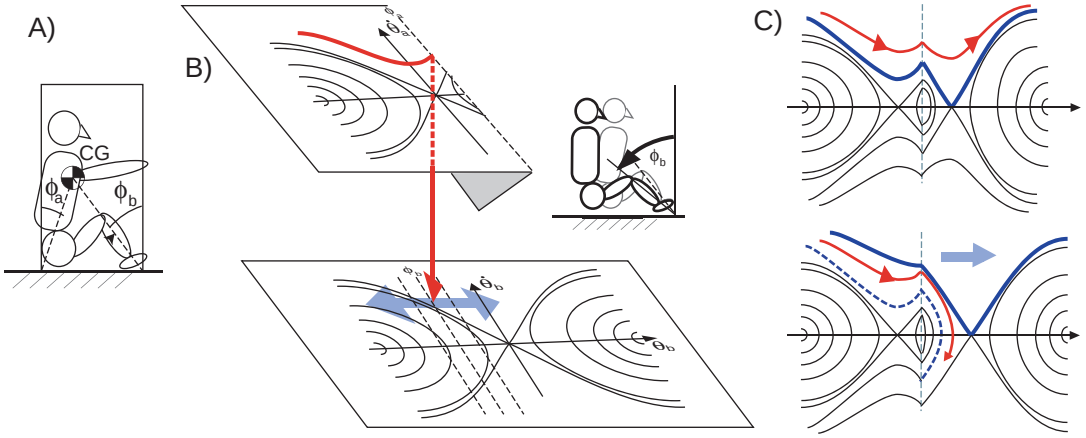


Figure 3: 接地点の移動における、相図の模式図。A:「箱」内部の重心位置により、オフセット ϕ が異なる。B:脚の伸張により、オフセットが変化し、貼り合わせ面が移動する。C:貼り合わせ面の移動により、envelope を選択できる。

設計は、まず経路に対応する運動の概形から接地点をもとめ、接地点に応じて座標系を決める。運動の概形に応じてそれらを貼り合わせ、疑セパラトリクスをまたぐ地点での制御を計算する、という手順でプランニングが可能になる。ここで示した例は、座標系の貼り合わせ面の変化だけで制御 (運動パターンの選択) が出来たが、それだけでは疑セパラトリクスをまたげない場合は外力 (地面との相互作用) を与えることが必要になる。

プランニングがなくても、アドホックに、各 node(接地点の切換え/面または複数点での接地状態) において、次に入る envelope に向けて制御を加え、node と envelope の作るネットワークを探索することも可能である。

4 まとめ

このように、制御入力を可能な限り省き、身体のもつ力学的な特徴を利用して、タスクを実現する運動を実現するためのコンセプト Global Dynamics とそれに基づいた力学モデル

rolling box model を紹介した。Global Dynamics というコンセプトは、精密な制御には向かないが、誤差や外乱にも対応し緩やかに制御をするための方法論である。rolling box モデルにより、座標系の張り合わせとして運動を理解することが可能になった。ただし、ここでは振動などの内部自由度に関しては無視した。摩擦などの散逸が起きると、全体的に軌道は角変数の方向での原点への収縮がおきるが、ここで仮定した場合の運動は充分信用できる基準となると考えられる。今後は振動など、内部自由度の運動が本質的な場合にも対応できるように力学モデルの研究を進める予定である。

References

[1] K. Hirai, M. Hirose, Y. Haikawa, and T. Takenaka. The development of honda humanoid robot. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1998.

[2] Tad McGeer. Passive dynamic walking. *Int. J. of Robotic Res.*, 9(2):62 – 82, 1990.

[3] Tad McGeer. Passive walking with knees. *Proc. IEEE Conf. on Robotics & Automation*, pages 1640 – 1645, 1990.

[4] R. Q. van der Linde. Passive bipedal walkng with phasic muscle contraction. *Biol. Cybern.*, 81:227 – 237, 1999.

[5] Martijn Wisse and J. van Frankenhuyzen. Design and construction of MIKE; a 2D autonomous biped based on passive dynamic walking. In *proceedings of 2nd International Symposium of Adaptive Motion of Animals and Machines (AMAM) 2003*, pages WeP–I–1. 2003.

[6] J. Pratt and G. Pratt. Exploiting natural dynamics in the control of a planar bipedal walking robot. In *Progeedings of the Thirty-Sixth Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*, pages 739–748. 1998.

[7] Tomoyuki Yamamoto and Yasuo Kuniyoshi. Stability and controllability in a rising motion: a global dynamics approach. In *proceedings of IROS2002*, pages 2467–2472. 2002.

[8] Yasuo Kuniyoshi, Yoshiyuki Ohmura, Koji Terada, Akihiko Nagakubo, Shin ichiro Eitoku, and Tomoyuki Yamamoto. Embodied basis of invaliant features in execution and perception of whole body dynamic actions – knacks and focuses of roll-and-rise motion. *Robotics and Autonomous Systems*, 48:189–201, 2004.

[9] Tomoyuki Yamamoto and Yasuo Kuniyoshi. Discreteness of control points in human rising: a global dynamics approach. In *proceedings of AMAM2005 (Adaptive Motions of Animals and Machines)*. 2005.

[10] M. Vukobratovic and J. Stepanenko. On the stability of anthropomorphic systems. *Mathematical Biosciences*, 15:1–37, 1972.

[11] 川人光男. **脳の計算理論**. 産業図書, 1996.

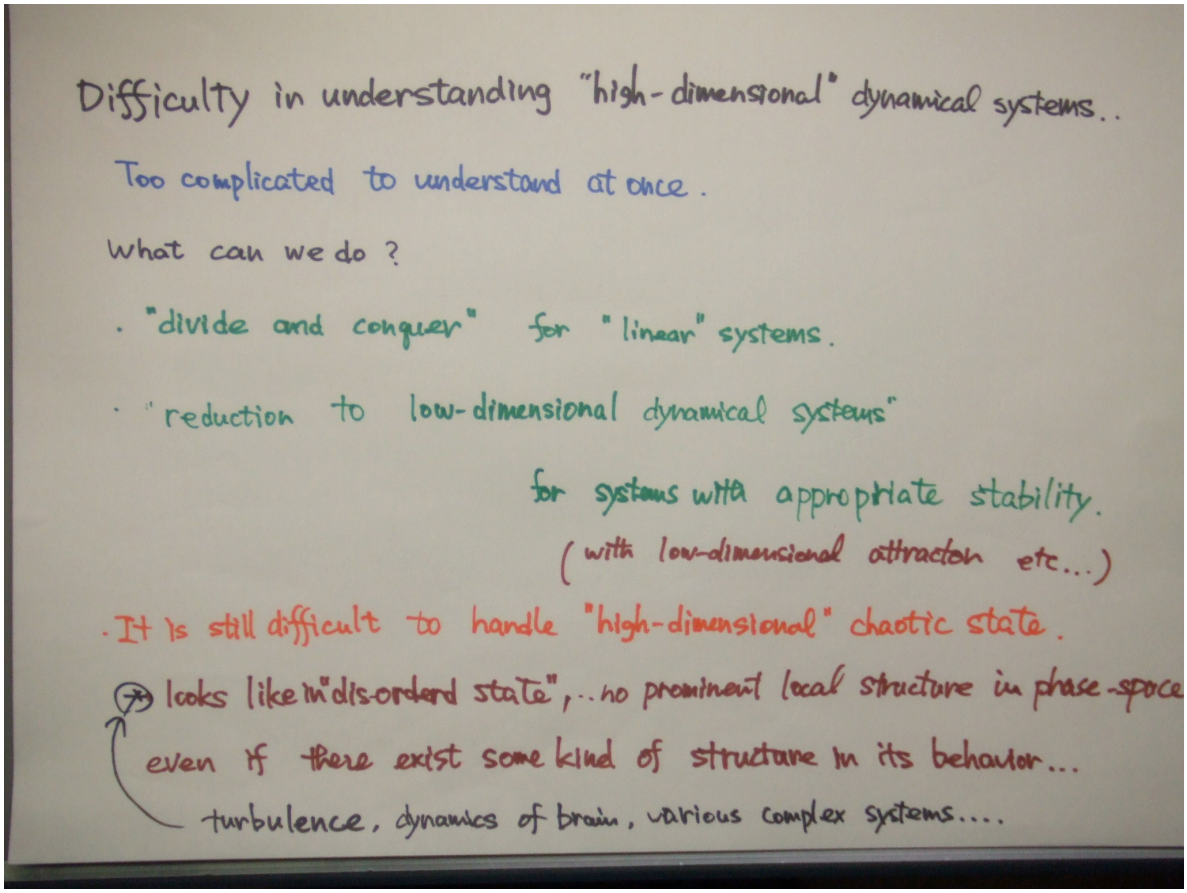
[12] Tomoyuki Yamamoto and Yasuo Kuniyoshi. Control as splicing of exploitable dynamics: a global dynamics approach to human rising. *submitted*.

GCM系でみられる準安定状態と遍歴現象

大阪大学
大学院情報科学研究科
情報基礎数学専攻

茶碗谷　毅

2006/06/28 NAND



WORKING MODEL(1):

Globally coupled tent map(GCTM) system

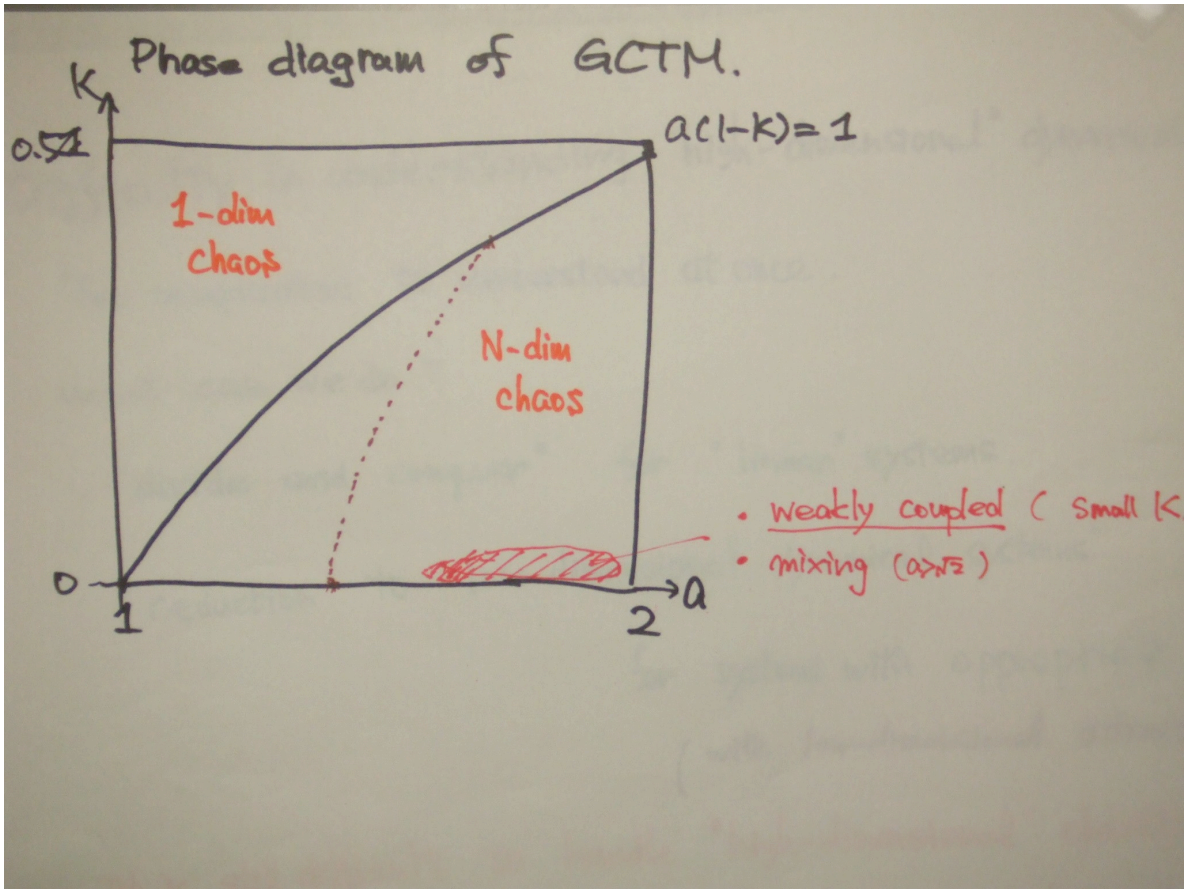
- N-dimensional map system, given by

$$x_{i,t+1}=(1-k)\,a\left(\frac{1}{2}-\left|x_{i,t}-\frac{1}{2}\right|\right)+\frac{k}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2}-\left|x_{j,t}-\frac{1}{2}\right|\right)$$

a, k, N : parameters

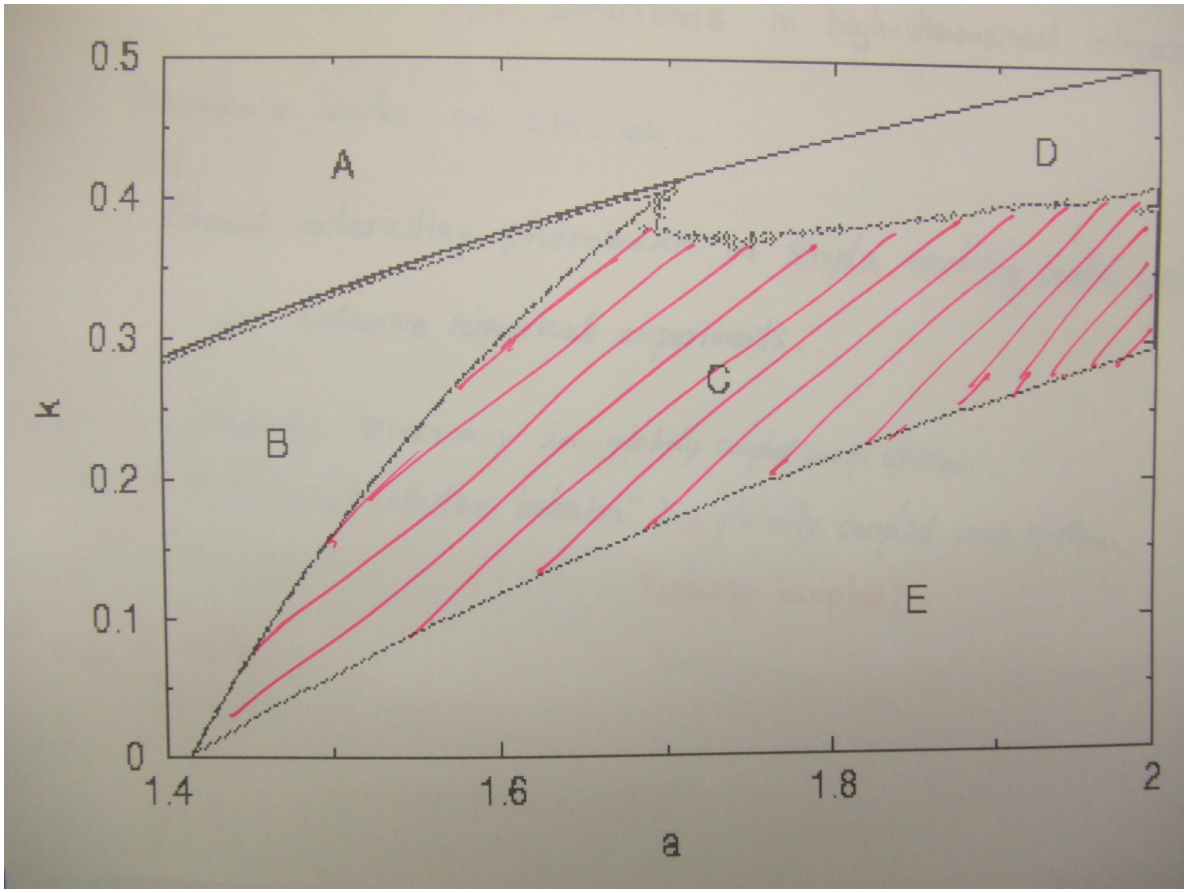
For $k=0$, 2^n-band chaos appears in $2^{(2^{-(n+1)})}<a<2^{(2^{-n})}$

(a>1) and (a(1-k)<1) : 1-dimensional chaos
a(1-K)>1: expanding in all direction(N-dimensional chaos)

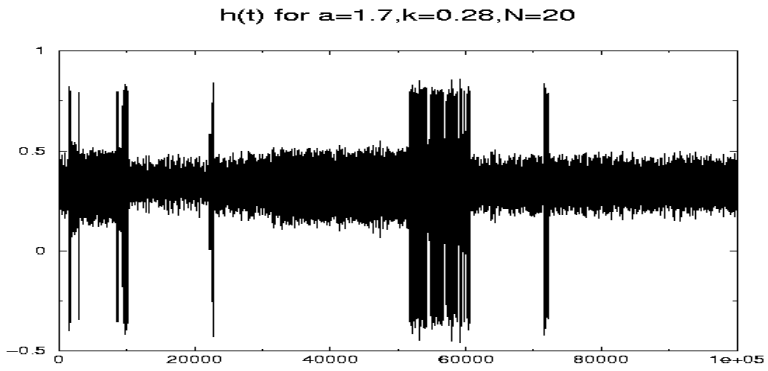


Target phenomenon

- Intermittent transition among “quasi-stable” states in globally coupled tent map system
  - “Quasi-stable states”:
    - exhibit N-dimensional chaos
      - (Locally expansive in all direction)
    - N -elements are divided into 2 groups. The grouping are kept invariant for a certain (possibly very long) duration
    - Typical lifetime is longer in system with larger N
      - CLEAR INTERMITTENCY for LARGE N
  - Observed in broad area of parameter space
    - Unusual as an intermittency !



Example of h(t)



- Intermittent behavior indicates…
  - Something in the phase space holds the trajectory, for a considerably long but finite duration
- What captures the trajectory?
  - Something like Invariant set
  - Similar to attractor in some sense

For typical cases,
trace of broken attractor, after collision of the attractor and its basin boundary (saddle-node bifurcation, boundary crisis etc.)
e.g.)

type-I,II,III intermittency
crisis induced intermittency
on-off intermittency

Clear intermittency is observed in relatively narrow parameter region, because the strength of the instability of "ruin" grows quickly as parameter move away from the bifurcation point

Intermittency with life time longer than T : observed only in parameter region with width T^{-a}

WORKING MODEL (2):

Non-linear Perron Frobenius(NLPF) system

- Dynamical system of “distribution” $\rho(x)$,

$$\rho_{t+1}(x)=\int \delta(f(y,t)-x)\rho_t(y)dy,$$

$$f(x,t)=(1-k)a(\frac{1}{2}-|x-\frac{1}{2}|)+kh(t),$$

$$h(t)=\int a(\frac{1}{2}-|x-\frac{1}{2}|)\rho_t(x)dx$$

a, k: constant (parameter)

$\rho(x)$ corresponds to “one-body distribution” of GCTM

With this representation, we can treat GCTM with different system size(N) in the same phase space.

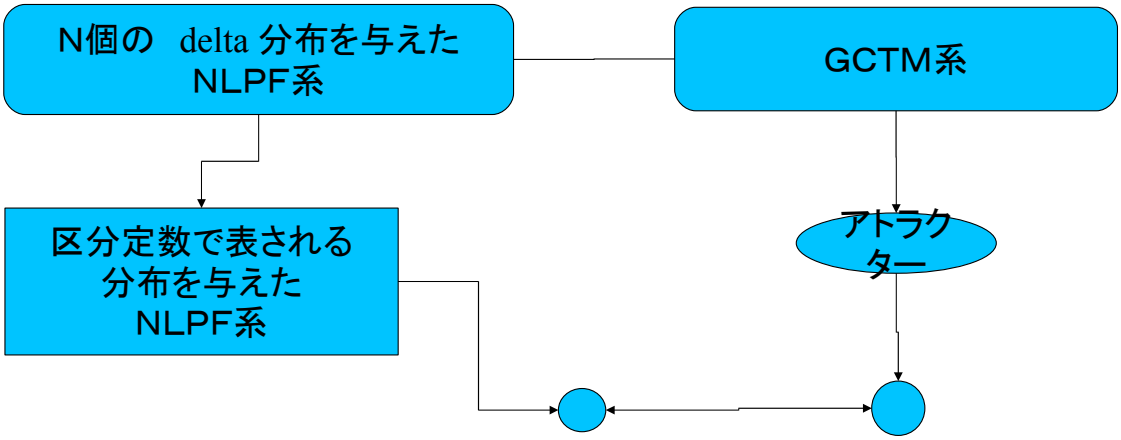
(N-dimensional GCTM system

<---> NLPF with Phase space restricted on sum of N deltas)

GCTM と NLPF の関係について

naive expectation:

十分大きなGCTM系の巨視的な挙動は”なめらか(絶対連続／実際には区分定数分布)”な分布を与えた NLPF 系で近似的に再現できる

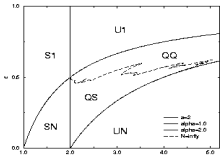


A prominent discrepancy between GCTM and NLPF: Crisis at a=2

- GCTM with a=2 is critical (on the crisis bifurcation) for any N and k :
  (bounded attractor inevitably contain 1-cluster state)
- NLPF with a=2, ($0<k<1/2$) and distribution with bounded variation is not on the crisis:
  for initial states with bounded total variation, total variation never diverge

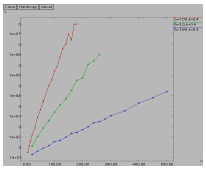
Numerical results: Long transient (quasi-stable phase) and Phase diagram

- Numerically obtained phase diagram
  [wide discrepancy of crisis bifurcation line]

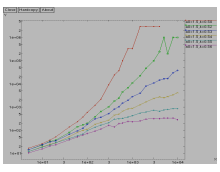


- Relation between lifetime and systemsize

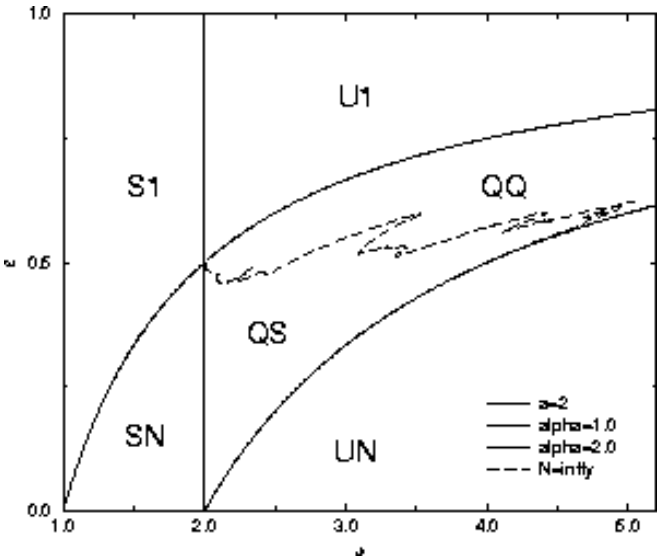
N vs Lifetime



N vs Lifetime @ critical parameter



Phase diagram for GCTM



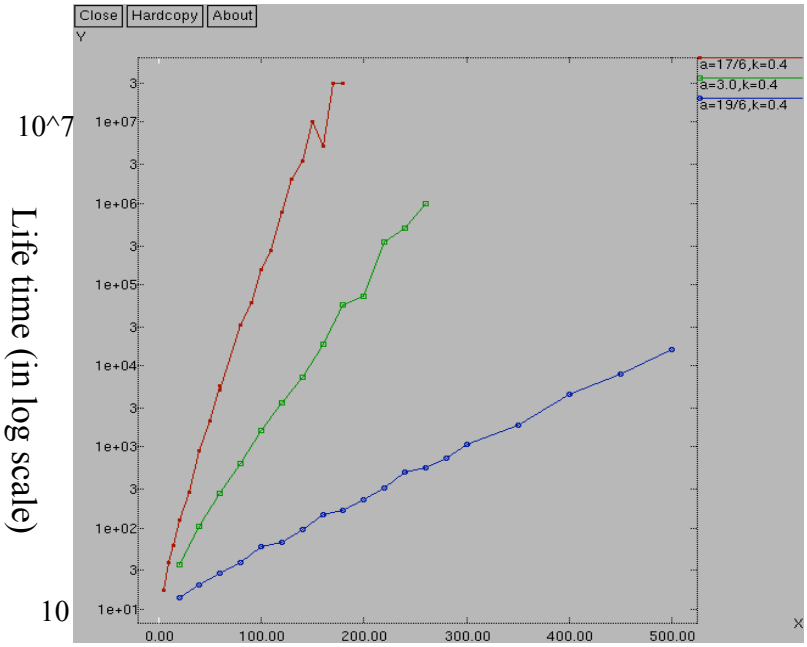
S1:
1-dim bounded attractor

SN:
N-dim bounded attractor

QS:
No bounded attractor
lifetime of transient diverges as $N \to \infty$.

QQ:
No bounded attractor
(with possibly fairly long transient)

System size vs Lifetime



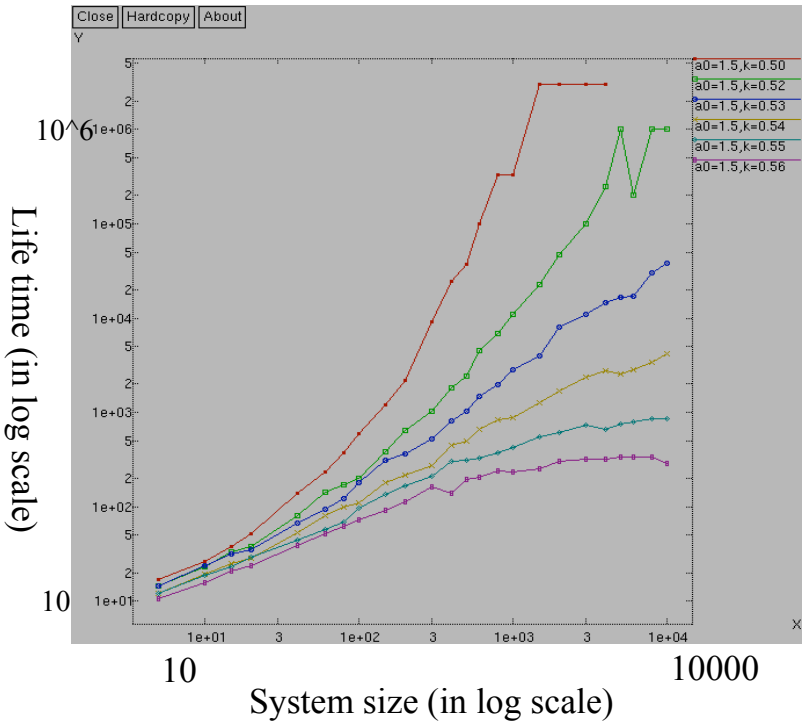
10^7

Life time (in log scale)

10

System size

System size vs Lifetime



Numerical results indicates...

- There exist a large discrepancy in the position of the crisis bifurcation line of GCTM and that of NLPF (with piecewise constant distribution function)
- GCTM with parameter value inbetween these two bifurcation lines exhibits long transient behavior, whose life time grows with N as

$$\log(\tau) \sim N$$

  - Might be regarded as escape from macroscopic/thermodynamic attractor induced by “noise” due to “finite size effect”

2-band 状態の安定性について

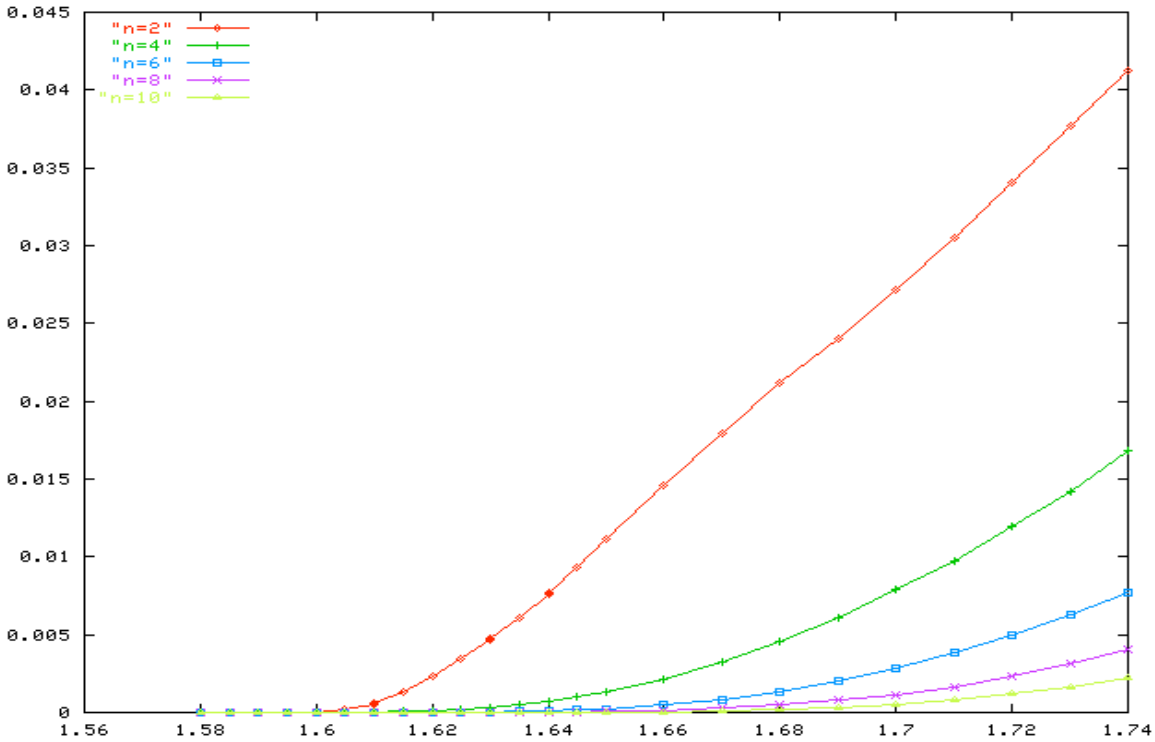
- 2-band 状態はクライシスを経由して壊れる
- クライシスが起こるパラメータの値に関しては
  - 適当な条件の下では、N(素子数)への依存性がなくなり、a, k 及び (2つの集団の)相対的なおもみによって決まる
  - GCTM と NLPF では分岐のラインは必ずしも一致しない(実際に大きな乖離が見られている)

GCTMのクライシスが起こる点の N(素子数)依存性について

- a(1-k)>sqrt(2) の範囲においては、適当な分割比をもつ2バンド状態漸近安定アトラクターが存在するためには、(対応する重みを与えた)2素子結合系が対応する2バンドアトラクターを持つことが必要条件となっている。
  - したがって2素子系のクライシスの方が多素子系よりも先か同時に起こることになる
- 数値実験の結果はこれらの系においてクライシスが同じパラメータで起こることを示唆している
- a(1-k) が sqrt(2) よりも小さい領域においても、ある程度広い範囲にわたって2素子系とN素子系のクライシスは同じ点でおきているように見える
  - a(1-k) ~ 1.2 付近よりも下では、ずれが生じているように見える。(ただし「準安定領域」の広さと比較してそれほど大きなずれではない)

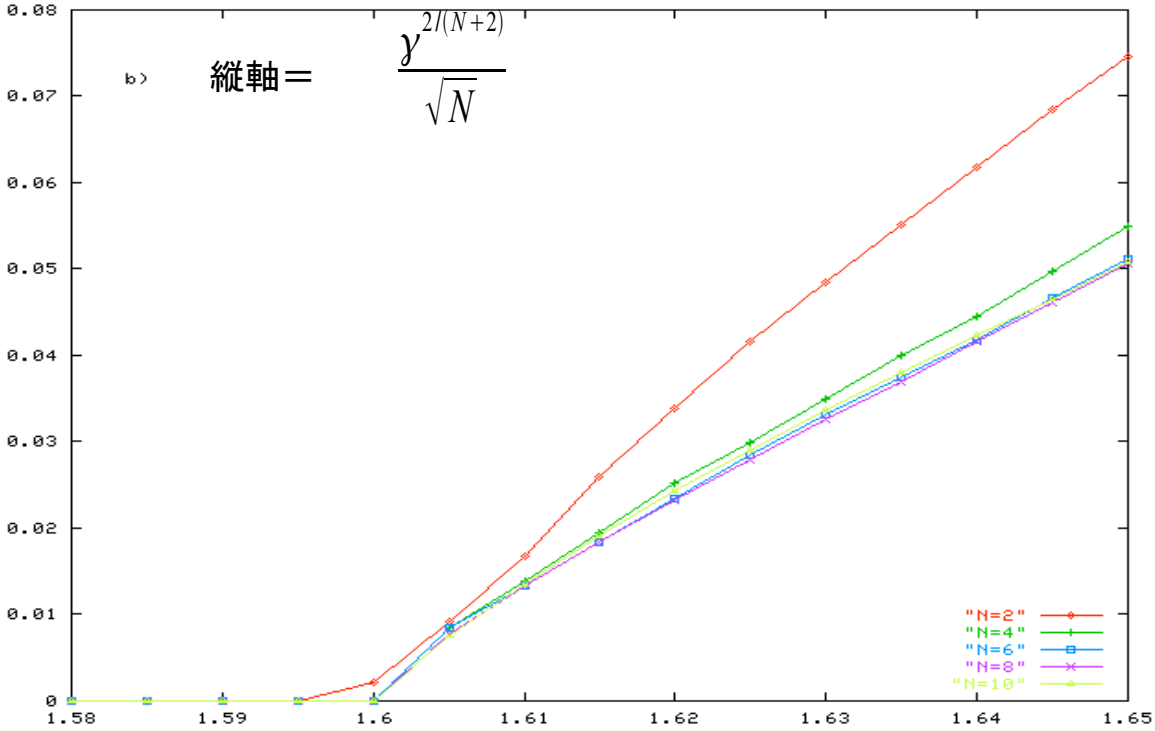
等分割2band state の崩壊率 (横軸 a, k=0.30(fixed))

（2バンドが崩壊するパラメータはNに依存性するようにみえるが・・・）

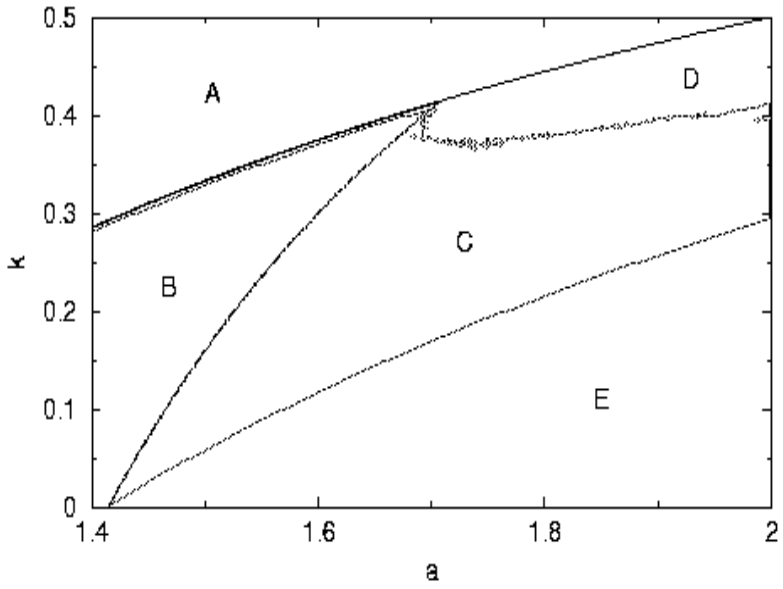


等分割2band state の崩壊率(rescaled)(横軸 a, k=0.30(fixed))

（立ち上がりはNと共に遅くなるものの、Nの値によらず同じところで壊れている）



Stability of Equally partitioned 2-band states



A:point cluster attractor
(No 2-band state)

B:stable
(NLPF & GCTM)

C:"quasi-stable"
(NLPF: stable)
(GCTM: unsbale)

D:unstable

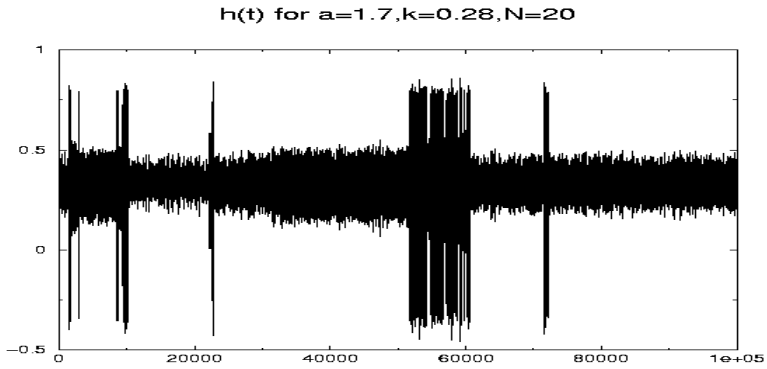
E:
(NLPF: No 2 band state)
(GCTM: unstable)

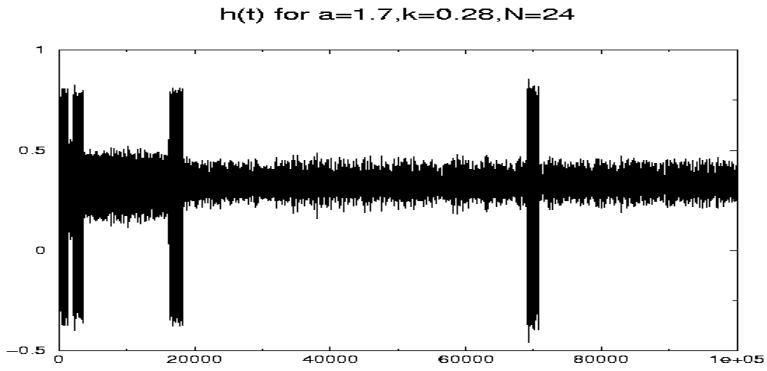
Numerical observation of the intermittency:

- Choose (a,k), s.t.,

  2-band states are unstable in GCTM system
  and
  (some of) 2-band states are stable in NLPF

  - Example of h(t)
  - Histgram of the life-time of 2-band states



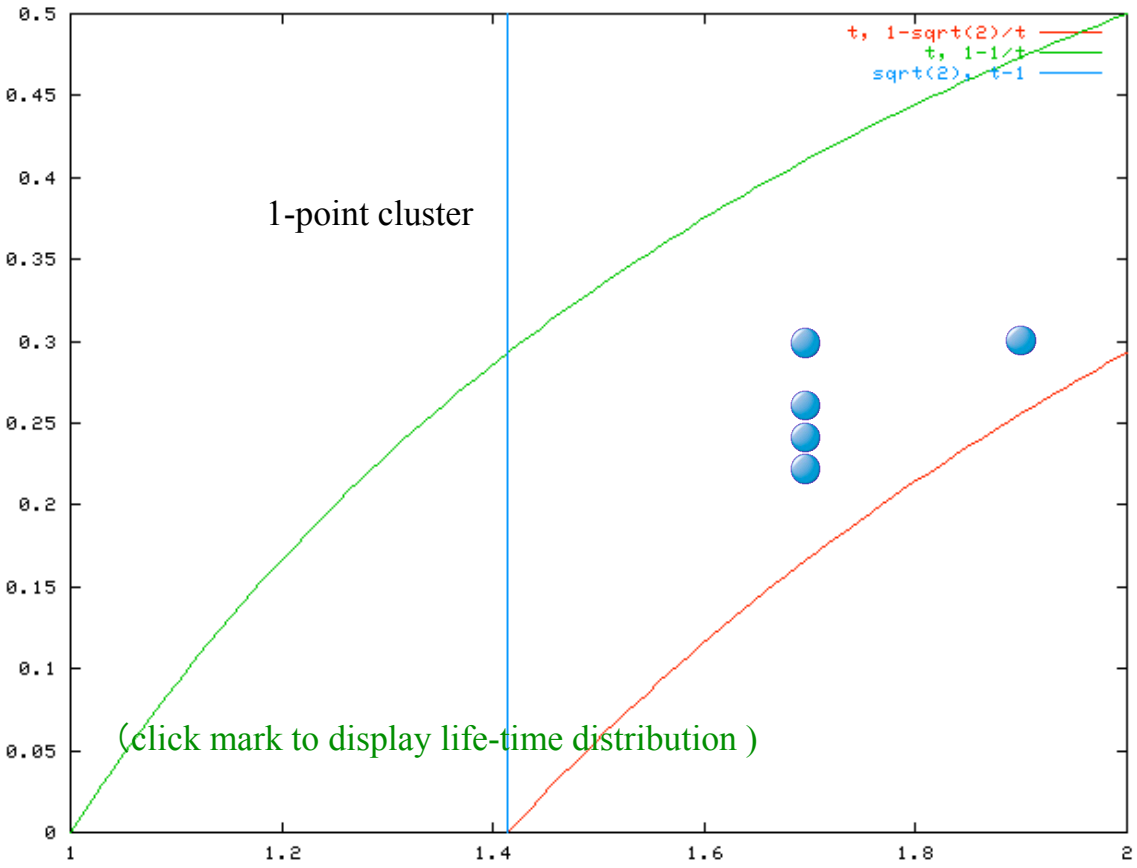


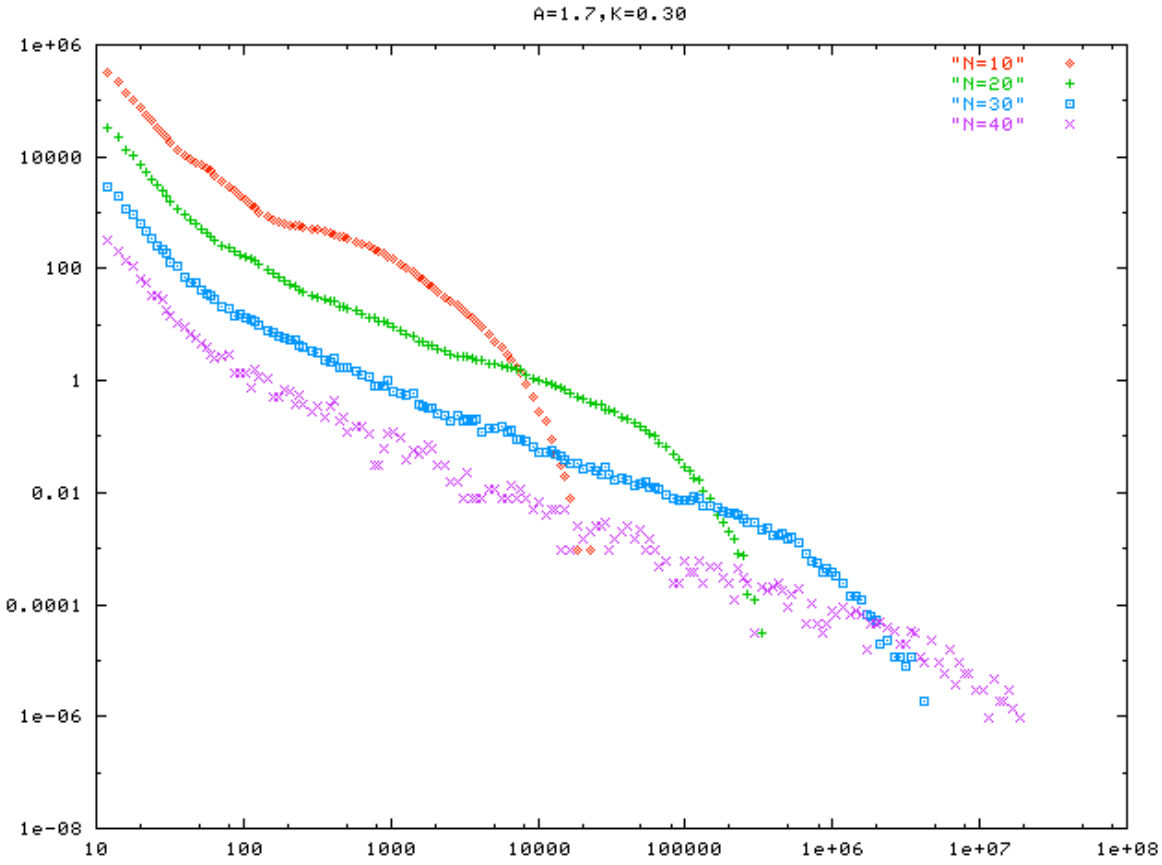
Numerical observation of the intermittency:

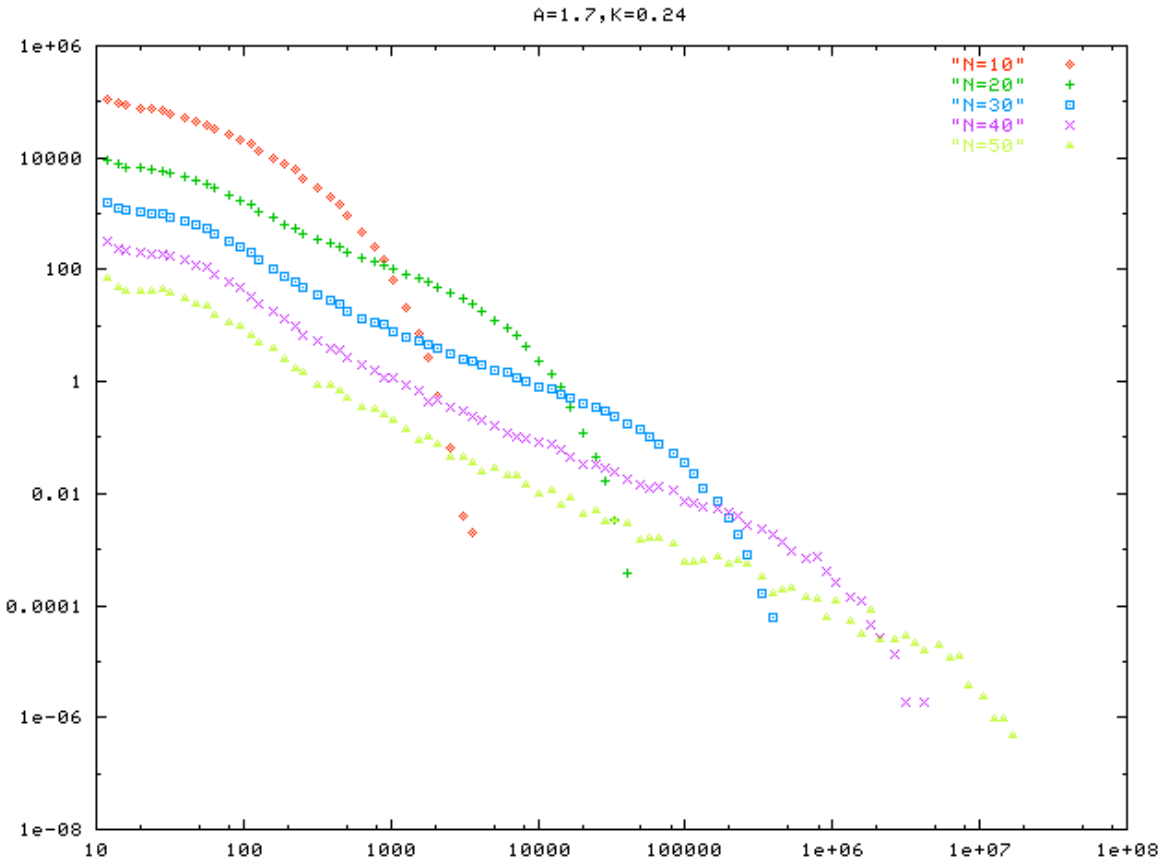
- Choose (a,k), s.t.,

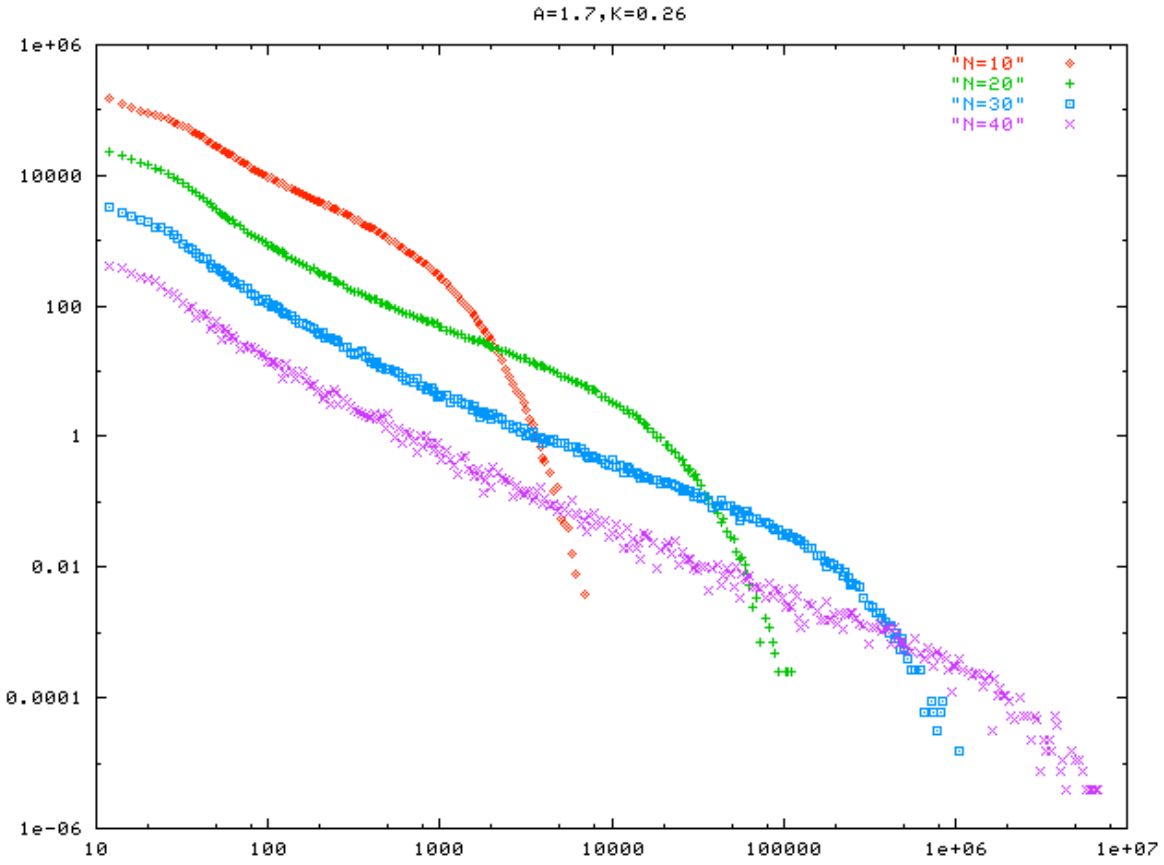
  2-band states are unstable in GCTM system
  and
  (some of) 2-band states are stable in NLPF

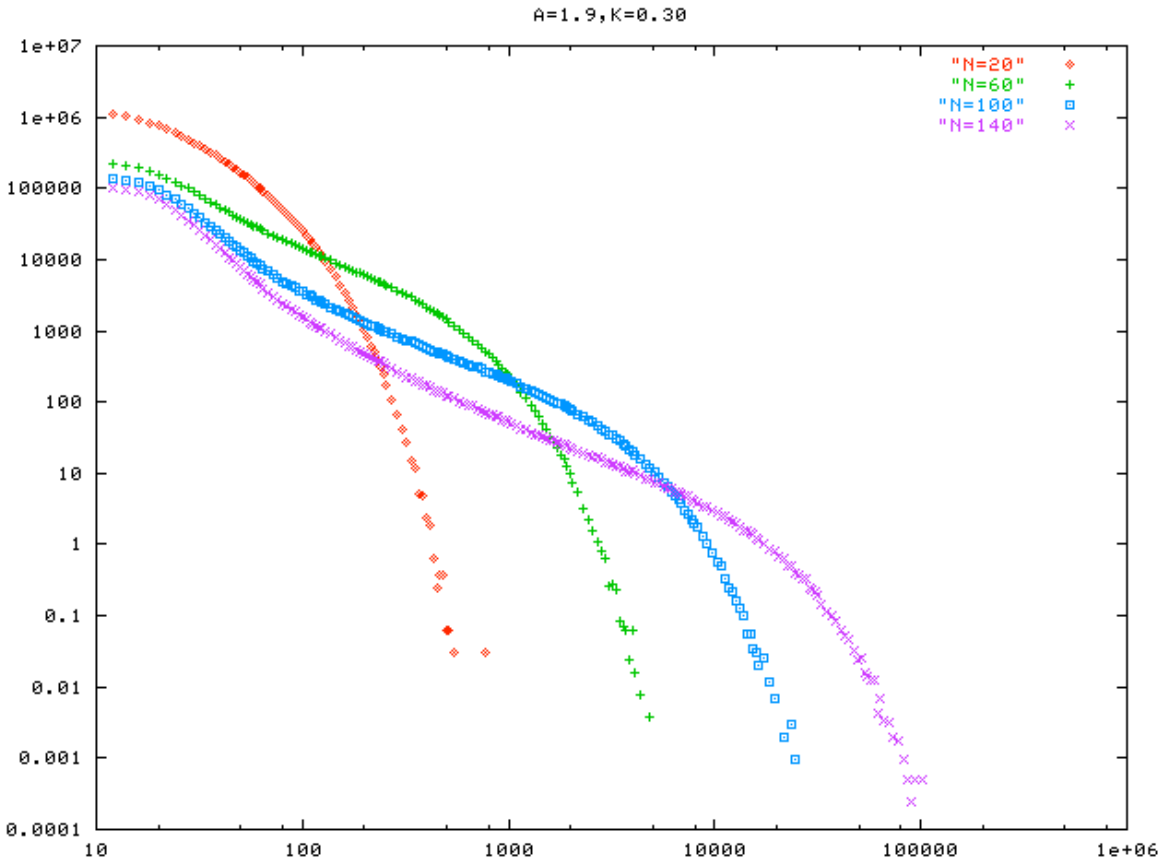
  - Example of h(t)
  - Histgram of the life-time of 2-band states


t, 1-sqrt(2)/t
t, 1-1/t
sqrt(2), t-1
1-point cluster
(click mark to display life-time distribution)


A=1.7,K=0.30
"N=10"
"N=20"
"N=30"
"N=40"


A=1.7,K=0.24
"N=10"
"N=20"
"N=30"
"N=40"
"N=50"
1e+06
10000
100
1
0.01
0.0001
1e-06
1e-08
10
100
1000
10000
100000
1e+06
1e+07
1e+08


A=1.7,K=0.26
"N=10"
"N=20"
"N=30"
"N=40"
1e+06
10000
100
1
0.01
0.0001
1e-06
10
100
1000
10000
100000
1e+06
1e+07



Analysis on the life-time distribution

- (1) life-time distribution for 2-band with specified partition ratio

  →exponential decay

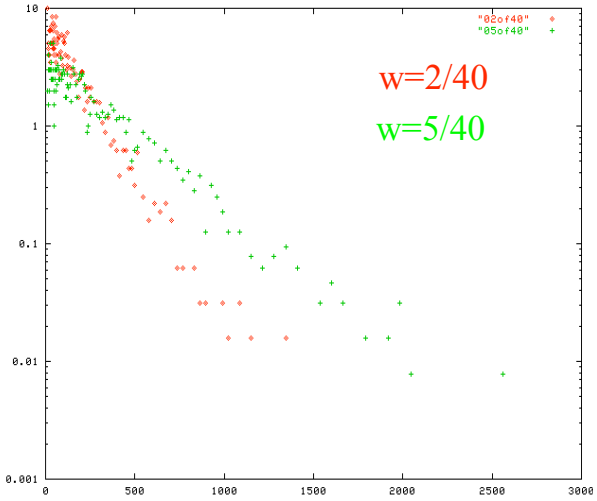
- (2) Relation between partition ratio and life-time

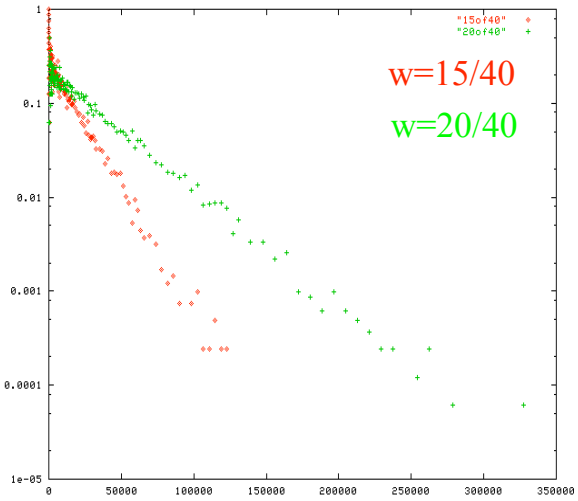
  [log (lifetime)] depends N linearly

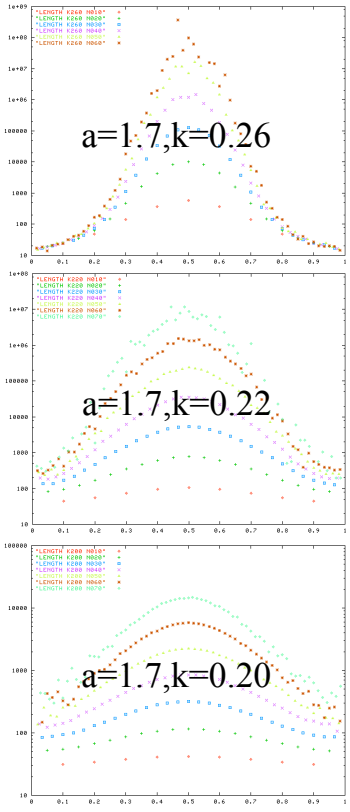
  its coefficient smoothly depends partition ratio

  - For Large N : lifetime distribution of 2-band states has some range with (nearly uniform distribution in logscale)

分割比固定での持続時間分布（a=1.7,k=0.22,N=40)







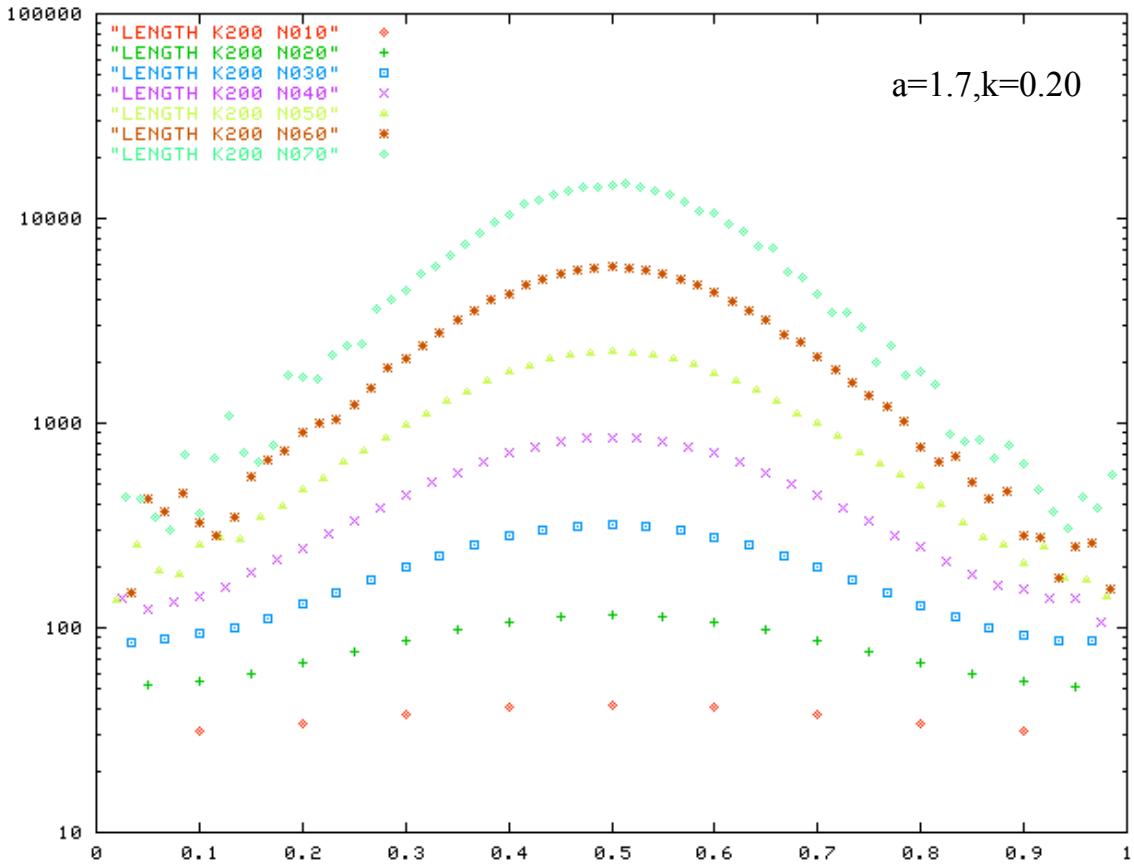
Dependence of “life-time” on N and Partition ratio

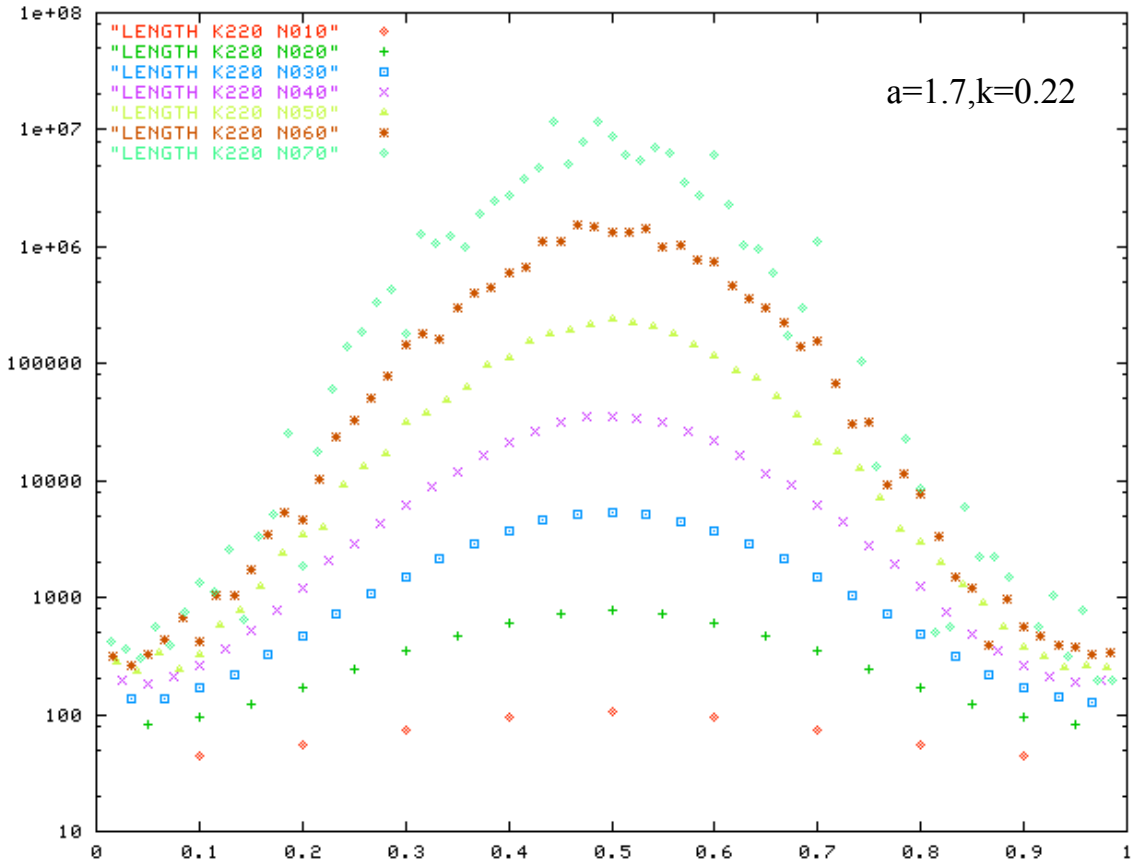
Nとともに準安定状態の寿命の
分布する幅が広がっている

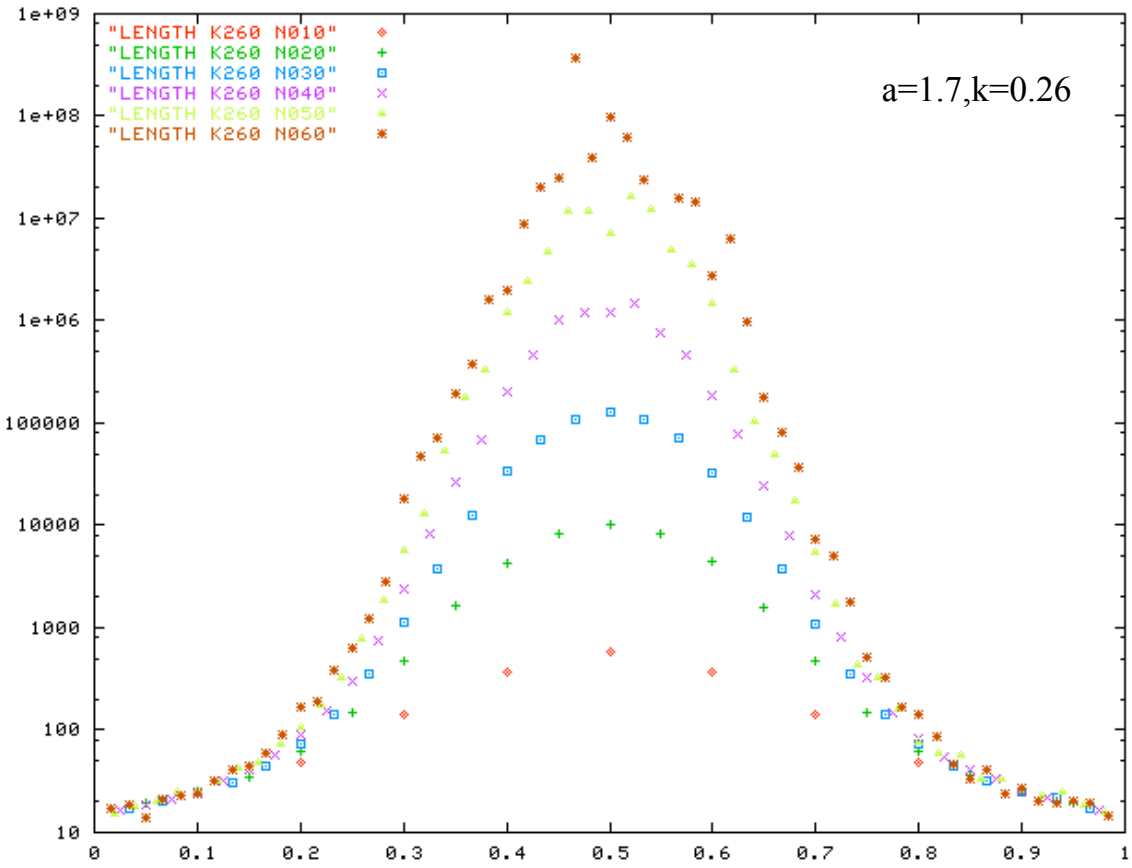
log(寿命) ～（分割比の関数）* N

となっているように見える

N大のとき、準安定状態の寿命は広い桁にわたりほぼ一様な密度で分布することになると考えられる


"LENGTH K200 N010"
"LENGTH K200 N020"
"LENGTH K200 N030"
"LENGTH K200 N040"
"LENGTH K200 N050"
"LENGTH K200 N060"
"LENGTH K200 N070"
a=1.7,k=0.20
100000
10000
1000
100
10
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


"LENGTH K220 N010"
"LENGTH K220 N020"
"LENGTH K220 N030"
"LENGTH K220 N040"
"LENGTH K220 N050"
"LENGTH K220 N060"
"LENGTH K220 N070"
a=1.7,k=0.22
1e+08
1e+07
1e+06
100000
10000
1000
100
10
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1



まとめ

- GCTM系において、クライシス分岐から大きく離れたパラメータ領域においても間欠的挙動（2バンド間欠性）が現れる
- 大自由度極限で安定となるような「準安定状態」（の族）の存在が間欠性の出現に寄与していると考えられる。
  - 不安定性の強さの分布は広い桁にわたりほぼ一様になっており、ベキ則に従う遷移時間間隔を生じる下地となっている。

力学系の設計方法

大阪大学 生命機能研究科
中島昭彦*

多細胞生物の生体内では、細胞間の協調的な相互作用を介して細胞種比率や体長等が安定に保たれる。このような生物にみられる安定な制御機構を説明するため、数理モデルを構成した。モデルの解析を通して、相互作用の形に依存して異なるタイプの安定性を保持するということがわかった。その機構は、細胞集団の大きさや細胞種の比率に対するヌルクラインの変化として理解することができる。

1 はじめに

多細胞生物の生体内では、複数の細胞種の比率や発生プロセスのタイミングに関する安定性が存在することが知られている [1–3]。細胞集団において複数の細胞種が混在している状況を力学系としてみると、ある種のクラスタリング状態と見ることができる。そのような現象は大自由度力学系において集団運動 [4, 5] と呼ばれる。集団運動と多細胞生物とのアナロジーに注目し、Furusawa らは大自由度力学系として細胞分化をモデル化した [6]。そこでは、実際の生物の発生過程で見られるように、細胞種の比率の摂動に対する安定性や細胞分化の順序性といった現象が数理モデルにおいても観察された。しかし、実際の生物に見られる振舞とモデルで見られた現象との関連性については明らかにはなっていない。本稿では、上記のような発生過程でみられる安定性を、細胞内自由度を簡略化したモデルを解析することを通し、理解することを試みる。

2 細胞分化モデル

2.1 directional interaction

まず、以下のモデルを考える。

$$\tau \frac{du_i(t)}{dt} = C_u \frac{u_i^\alpha(t)}{K_u^\alpha + v^\alpha(t) + u_i^\alpha(t)} - u_i(t) + A_u \tag{1}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = C_v \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^\beta(t)}{K_v^\beta + u_i^\beta(t)} - v(t) \tag{2}$$

(i : 細胞のインデックス、N : 細胞数)

* nakajima@complex.c.u-tokyo.ac.jp

parameter は $C_u = 1.0, K_u = 0.1, A_u = 0.04, \alpha = \beta = 2.0, \tau = 10.0, K_v = 2.0$ で考える ($\alpha, \beta > 1.0$ であれば、定性的に同様の結果が得られる)。(1) 式は細胞内化学反応 (遺伝子発現等)、(2) 式は拡散物質による細胞間相互作用を表す。single cell の場合、$\tau \gtrsim 1$ では、C_v の値によって、系は単安定もしくは相安定である。このシステムの結合系としての性質を調べる。便宜上 $u_i > 0.3$ の状態を A type,$u_i < 0.3$ の状態を B type の細胞と呼ぶ。全細胞数 (N_{tot}) を変化させて，細胞のクラスタリングについて数値計算した結果が図 1 である。図より、N_{tot} が小さい領域では $N_A = N_{tot}$ であり、$N_{tot} >> 1$ では N_A が有限値に収束することがわかる。

これを解析的に理解するため、Atype の細胞数が N_A,Btype の細胞数が N_B であるような two clusterstate(N_A, N_B) を考える。$\tau >> 1$ より $\frac{dv}{dt} >> \frac{du_i}{dt}$ なので、断熱的に v について解くと、

$$v = C_v(\alpha N_A + \beta N_B) \sim \alpha C_v N_A$$

となる。($\alpha = \frac{u_A^2}{K_v^2+u_A^2}, \beta = \frac{u_B^2}{K_v^2+u_B^2}$、$u_A$:A type の u_i 値,u_B:B type の u_i 値を表す)。一方で、u について考えると、u について相安定 (two clusterstate(N_A, N_B) が安定) になるためには、v の値が

$$v^{(min)} < v < v^{(max)} \tag{3}$$

$$v^{(min)} = \frac{\sqrt{-8A_u^2 + 20A_uC_u + C_u^2 - 8K_u - \sqrt{C_u(C_u - 8A_u)^3}}}{2\sqrt{2}}$$

$$v^{(max)} = \frac{\sqrt{-8A_u^2 + 20A_uC_u + C_u^2 - 8K_u + \sqrt{C_u(C_u - 8A_u)^3}}}{2\sqrt{2}}$$

であることが必要であることがわかる。つまり、two cluster state は N_A が

$$N_A^{(min)}(\sim \frac{v^{(min)}}{\alpha C_v}) < N_A < N_A^{(max)}(\sim \frac{v^{(max)}}{\alpha C_v})$$

を満たしている場合のみ安定に存在する。これより、$N_{tot} < N_A^{(min)}$ では、集団は Atype のみの single cluster state をとり、$N_{tot} = N_A^{(min)}$ で始めて Btype の cell が出現する。$N_{tot} > N_A^{(max)}$ では先の式を満たすような cluster state に落ち着く。その結果、$N_{tot} >> 1$ では N_{tot} の値に依存せず、$N_A = N_A^{(max)}$ で一定値に留まる。

2.2 mutual interaction

次に、(2) 式とは細胞間相互作用を一部変化したモデルを扱う。

$$\tau \frac{du_i(t)}{dt} = C_u \frac{u_i^\alpha(t)}{K_u^\alpha + v^\alpha(t) + u_i^\alpha(t)} - u_i(t) + A_u \tag{4}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = C_{v1} \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^\beta(t)}{K_{v1}^\beta + u_i^\beta(t)} - C_{v2} v(t) \sum_{i'=1}^{N} \frac{u_i^\beta(t)}{K_{v2}^\beta + u_i^\beta(t)} - v(t) \tag{5}$$

(i : 細胞のインデックス、N : 細胞数)

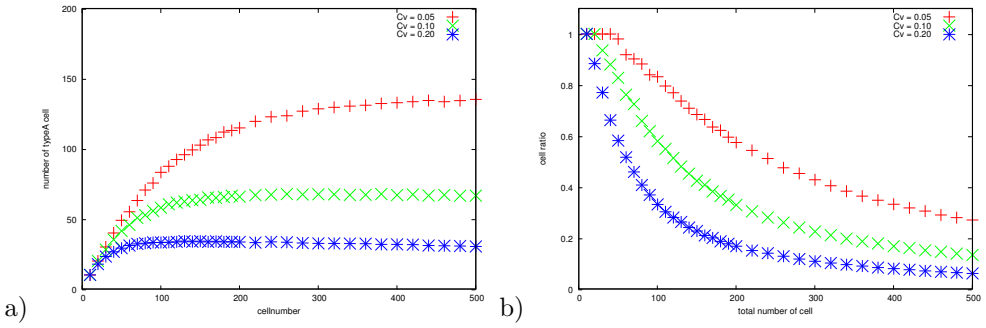


図 1　(1),(2) 式での細胞集団のクラスタリング。 N(全細胞数) を変化させたときの a)A type の細胞数 (N_A)、b)(A type の細胞数)/(全細胞数)(N_A/N_{tot})

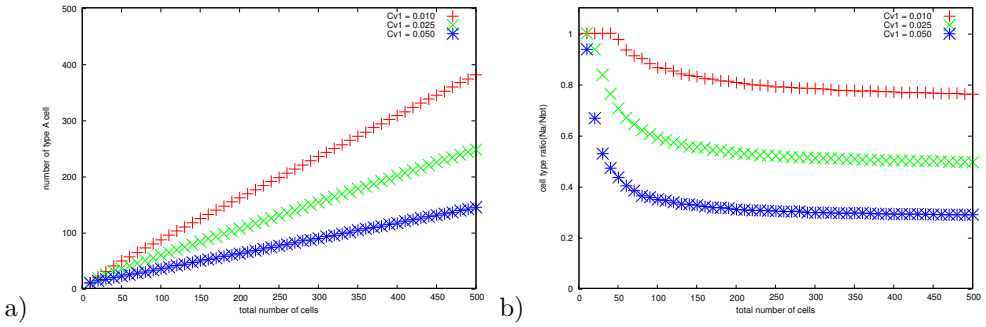


図 2　(4),(5) 式での細胞集団のクラスタリング。N(全細胞数) を変化させたときの a)A type の細胞数 (N_A)、b)(A type の細胞数)/(全細胞数)(N_A/N_{tot})

parameter は $\tau = 10.0, C_u = 1.0, K_u = 0.1, A_u = 0.04, \alpha = \beta = 2.0, C_{v2} = 0.05$ で以下考える。数値計算の結果を図 2 に示す。この場合、$N_{tot} >> 1$ で (N_A/N_B) が、C_{v1} の値に応じて一定値に収束している。

さきほどの場合と同様に解析して、

$$v = \frac{\alpha_A C_{v1}}{\beta_B C_{v2}} \frac{N_A}{N_B} \frac{1 + \frac{\alpha_B N_B}{\alpha_A N_A}}{1 + \frac{\beta_A N_A}{\beta_B N_B} + \frac{1}{C_{v2}\beta_B N_B}} \sim \frac{C_{v1}\alpha_A N_A}{C_{v2}\beta_B N_B}$$

$(\alpha_A = \frac{u_A^2}{K_{v1}^2 + u_A^2}, \alpha_B = \frac{u_A^2}{K_{v1}^2 + u_A^2}, \beta_A = \frac{K_{v2}^2}{K_{v2}^2 + u_B^2}, \beta_B = \frac{K_{v2}^2}{K_{v2}^2 + u_B^2}, u_A : Atype\ の\ u_i 値, u_B : Btype\ の\ u_i 値を表す)$。

となる。u が相安定になるための条件はさきほどと同じく、(3) 式であらわせるが、今の場合、cluster state に課される条件は

$$(\frac{N_A}{N_B})^{(min)}(\sim \frac{\beta_B C_{v2}}{\alpha_A C_{v1}} v^{(min)}) < \frac{N_A}{N_B} < (\frac{N_A}{N_B})^{(max)}(\sim \frac{\beta_B C_{v2}}{\alpha_A C_{v1}} v^{(max)}) \tag{6}$$

のように、population size ではなく、二種類の cell type の比率に依存することになる。

2.3 random network model

上記の解析より、細胞間相互作用の形によって cluster の安定性が population size に依存する場合と細胞比率に依存する場合が構成できるということをみてきた。これの、より一般的な場合として random network model [6] を考える。Random network model とは以下のように表せる。
細胞内化学反応

$$\frac{dx_i^{(l)}(t)}{dt} = \delta x_i^{(l)}(t) - x_i^{(l)}(t)\sum_{i=1}^{M}\delta x_i^{(l)}(t) \tag{7}$$

$$\delta x_i^{(l)}(t) = \sum_{j,k=1}^{M} C_{jki}x_j^{(l)}(t)(x_k^{(l)}(t))^{\alpha} - \sum_{j',k'=1}^{M} C_{ij'k'}x_i^{(l)}(t)(x_j^{(l)}(t))^{\alpha} + \sigma_i D(X_i - x_i^{(l)}(t)) \tag{8}$$

細胞間相互作用 (栄養物質)

$$\frac{dX_i(t)}{dt} = D_{env}\sigma(S_i - X_i(t)) - \frac{1}{V}\sum_{m=1}^{N} D_{cell}(X_i(t) - x_i^{(m)}(t)) \tag{9}$$

(i : 化学成分のインデックス、l : 細胞のインデックス、M : 化学成分数、N : 全細胞数)

(1) が細胞内 chemical network,(2) が拡散する栄養成分による細胞間相互作用である。階層的な細胞分化過程、分化比率の安定性等の振舞をみることができる。$\frac{dX_i}{dt} = 0$ として (9) 式を解くと、

$$X_i = \frac{\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} x_i^{(m)} + \frac{1}{N}\frac{VD_{env}S_i}{D_{cell}}}{1 + \frac{1}{N}\frac{VD_{env}}{D_{cell}}}$$

と整理できる。$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} x_i^{(m)} = \sum_{k=1}^{Q} R_k\tilde{x}_i^{(k)}$ と置き換えれば、

(Q : 異なる細胞種の数, $R_k = (N_k/N) : k-type$ の細胞数と全細胞数の比, $\tilde{x}_i : k-type$ の細胞における x_iの値)

$$X_i = \frac{\sum_{k=1}^{Q} R_k\tilde{x}_i^{(k)} + \frac{1}{N}\frac{VD_{env}S_i}{D_{cell}}}{1 + \frac{1}{N}\frac{VD_{env}}{D_{cell}}}$$

となる。$\sum_{k=1}^{M} R_k\tilde{x}_i^{(k)}$ が一定だとすると、X_i は population size N に依存して変化する。これは (2.1) のモデルに対応した状況である。また、population size が $N >> 1$ では、

$$X_i = \sum_{k=1}^{M} R_k\tilde{x}_i^{(k)}$$

となり、cluster の安定性を決定している parameter(拡散物質) は細胞比率 (R_k) の関数で表される。これは (2.2) の状況に対応している。

3 まとめ

本講演では、細胞種の比率制御、発生過程のタイミングといった細胞集団における情報のやりとりが如何にして行われるかをモデルを通して示した。このような相互作用が実際の生物の如何なる状況で使われているかを調べることは興味深い。また、今回は two cluster state についてのみ解析したが、これがより多数の細胞種が存在する場合にどのような制御が可能かといった問題、細胞内反応と細胞間相互作用が分離不可能な場合等に関しては今後の課題である。

References

[1] R. H. Gomer. *Nat. Rev. Mol. Cell. Biol.*, 2:48–54, (2001).

[2] I. Rafols et al. *Differentiation*, 67:107–116, (2000).

[3] T. Gregor et al. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 102(51):18403–18407, (2005).

[4] K. Kaneko. *Physica D*, 41:137–172, (1990).

[5] N. Nakagawa and Y. Kuramoto. *Physica D*, 75:74–80, (1994).

[6] C. Furusawa and K. Kaneko. *Bull. Math. Biol.*, 60:659–687, (1998).

Graph Automata and Degree of Freedom

片岡直人

Department of Pure and Applied Sciences,

University of Tokyo, Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153, JAPAN

概 要

自由度変化系の一つの試みとしてのGraph Automataの解説とその展望について。Graph Automataはグラフの上で作動し、グラフの形を書換えながら時間発展するセル・オートマトンである。発見された自己増殖過程、及び自己伸長過程について例示を行う。本レポートは2006年06月、北海道大学電子科学研究所で行われた「大自由度力学系の新展開」における片岡の発表内容のうち、Graph Automataに関する部分を抜きだしたものである。

1 概観

大自由度力学系とは、その範疇に入らないものを探す方がむつかしいような巨大な形容である。しかしここであえて[1]力学系の言葉を強調するのは、その動きに注目し、こだわり続けたいという意思の表明である。

とはいえ、ただ漠然とした大自由度系という言葉によって、巨大な微分方程式の挙動を見つめ続ける等の試みは、近来顕著となって勢いを増しつつあるデータベース科学と同様に、何をどう見れば何がわかるのかという問題に引き寄せられがちとなる。無論それは、大自由度系独自の性質を見出したいという欲求からは不可欠の作業ではあるものの、何かがあるには違いないという一方的確信だけから挑むにはあまりに巨大な対象でもある。

この稿では、大自由度系を考えるための手がかりとして、空間とその上の自由度が結び付いたモデルについて考えたい。この系の利点は、比較的少ない自由度から順を追って系の性質にしたがって大自由度系に到

[1]代数の成立を完成と見做す立場ではなく。

達するという性質であり、また、奇妙な形式を持った力学系への試みでもある。

奇妙な力学系自体は、定義されてしまえばただの力学系にすぎないのは言うまでもないが、従前の力学系では見られなかった挙動なり理解なりを生み出す系として、期待をかけたい目標であり、大自由度系の理解のためにはそのような例題がまだまだ必要であるというのが、著者の立場の一つである。

2　グラフ・オートマトン

Graph Automata は、2002 年に富田ら [1] によって提案された新たなセル・オートマトン系である。離散時間上、同時に状態を更新する複数のセルがグラフ上に配置されており、セルの状態に応じてローカルにグラフの形状を変化させる構成を採る。グラフの変形を許さない場合には、通常のグラフ上セル・オートマトンと考えて良い。この構成を用いて富田らは、グラフの形状としての自己複製が見出せることを示し、またルールを設計することにより UTM(ユニヴァーサル・チューリング・マシン) を構成しうることを示した。その際に特にユニークであるのは、自己複製系が環状を成すテープと機械の張り合わせとして実装され、次々と計算結果を吐き出して行く様である。

このオートマトンの最大の特徴は無論、グラフを変形させるルールに存在する。富田らの構成にはおいては、セルはそれぞれ四つの隣接セルを持ち、自分とそれらの状態に従って、グラフをローカルに変形する。この際、セルの増加、消滅、エッジの繋ぎ変えが行われる。ローカルな変形がうまく全体で共同すると、グラフ全体の連結／非連結の変化が発生する。更にセルの数の増減が非連結性と協調した際に生成されるのがここでいう Graph Automata の自己増殖である。

オリジナルのグラフ・オートマトンにおいては多様にして興味深い構造が出現するが、グラフ書き換えの規則には煩瑣な部分があり、パターン・マッチングの上で複数の変更ルールに順位付けを行った末での処理を余儀なくされている部分がある。これは局所的なグラフの変形を同時並列に行った場合に、全体での整合性をどうとるかという問題に起因するが、その繁雑さの為に手軽なシミュレーションを妨げる部分があり、また系の設計に傾き易く、全体を見渡しにくくなるという弊害を発しやすい。

本稿では、機械設計としての視点を捨て、単純なルールと適当な初期

条件から始めた場合に、Graph Automata 型の構成がどんな挙動を見出しうるかに注目する。

3　モデルと基本的性質

3.1　グラフの構造

セル・オートマトンの時間発展する空間を定める。Graph Automata においては、セルの数も変動要素となるため、一つのグラフを用意するだけでは終らない。グラフのクラスを定め、それに対応する形でグラフ変形のルールを定める必要がある。これだけの条件ではクラスの定めようがなく、またこれ以上の拘束は恣意的ともなるが、準備的研究として、i) 隣接要素数の固定 ii) 取扱易さ、を優先する。

時間 n におけるグラフの定義は通常に従い、(V_n, E_n) の集合とする。ここで V_n は頂点 (セル) の集合であり、E_n は二つの頂点をつなぐ辺の集合 $E_n = \{(i,j)|i,j \in V_n\}$ である。両者の添字 n はそれらが時間によって変化することを示す。ここでグラフは無向グラフとし、影響を受けるセルには影響を与え返すという性質を仮定する。

簡単の為、グラフの変形規則としては、分裂と消滅のみを採用する。ここでの分裂は、セルが数を増やし、局所的にグラフを変形させることを指す。大域的に整合する局所的な (同時並列) 変形を用意することがここでの目的であるが、とりあえずの例として円を基盤とした空間をここでは採用することとする。グラフの変形の様式としては以下を要請する。

i) セル自身とその隣接セルから、セルの次の状態が定められる

ii) 次の状態が、分裂、消滅のいずれかであった場合に、局所的にグラフ (V_n, E_n) を変形し、規定の状態を配置する、もしくは消し去る (V_{n+1}, E_{n+1})。

ここでは初期グラフ (V_0, E_0) として、以下のものを採用する。

i) 二次元平面上に複数の円を配置する[2]。

ii) それぞれの交点に、セルを配置するか否かを決定する。

iii) セルは交点上に位置しているので、常に二本の線の上に存在する。隣接セルは二本の線をそれぞれ二方向に辿っていった先に出会う最初のセルとする[3]。

[2]円ではなく閉じている曲線であれば以降に問題は引きおこされない

[3]同一セルが異なる方向からの隣接セルと見なされることや、自分自身を隣接セルとみなすことを許す。

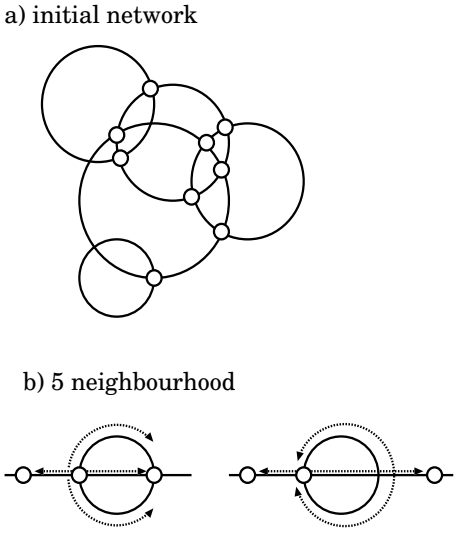


図 1: a) 初期条件の例。二次元上任意に置かれた円の交点に、セルを置くか置かないかを決める。こうしてできあがったグラフ上セルにおいて、全てのセルが四つ (含重複) の隣接セルを持つことに注意 b) セルが、同じセルを他方向に隣接するセルとみなすことを許す。

iv) その上にセルの存在しない円を取り除く。

以上の設定を採用することにより、任意のセルが四つの隣接セルを持つ初期グラフを得ることが可能である。(図:1).

この構成を採る利点としては、変形の規則を与えるのが容易であることが挙げられる。様々な形を考えることが可能であるが、単純なものの一つとして、ここでは次のような分裂と消滅のルールを採用する (図 2)。

i) 消滅。単純にそのセルをグラフ上から消去する。

ii) 分裂。周囲に小さな円を付け加え、新たに生成された交点の上にセルを配置する。その際、起点となった対象セルは消去しておく。

以上の操作によって、それぞれのセルにおける隣接セル数が四に保たれることは明らかである[4]。

簡便の為、分裂を考える際に、新しく描く円を充分小さくとることが必要である。たとえば隣接する二つのセルで同時に分裂が起こった場合に、両者の間で干渉が起こらない (新たに生成された円同士が重ならない) ことを要請しておく。

[4]消去によって円上にセルがなくなった場合は、その円を取り去って考える。

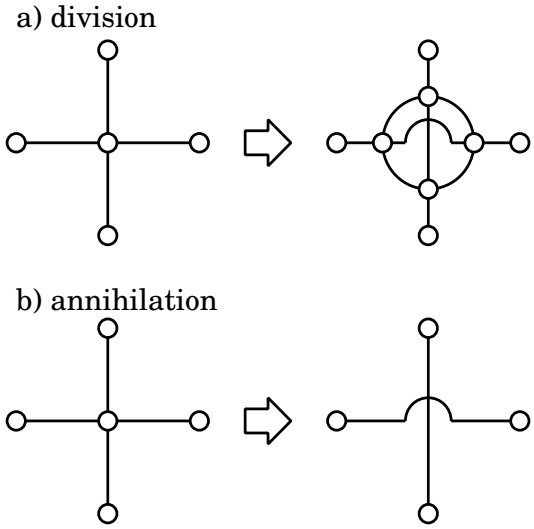


図 2: a) 分裂ルール。 b) 消滅ルール。

以上のような初期配置と、消滅、分裂規則から生成されるグラフにおいては、任意のセルが四つの隣接セルを持つことが保証され、隣接するセル同士の間での変形規則の優先度というものも必要がない。

この空間がフラクタル的な性質を持つことはほぼ明らかである。というのは、全てのセルが分裂していく場合に、それぞれのセルは周囲に小さな円を生成し、またその交点を中心とした円を生成するという過程が継続されるからである。セルの状態に関わらず分裂が指定されるようなルールにおいては、要素数は 4^n に従って増加し、エッジから成る円はフラクタル状に重ねられていく。このことからも、この系が要素数無限大に発散することが可能な系であることがわかる。

自明ではないのは、分裂に加えて要素の消滅が絡む場合であり、セルの状態が消滅を示した時に消されるのは、グラフの頂点であって、エッジからできている円そのものではない。

分裂も消滅も局所的な書き換えをしか行わないようなGraph Automataにおいて、それらがどのような大域的構造を生成しうるかは、非自明な問題設定である。

ここで採用したグラフの変形規則の特徴としては、トポロジーの変形[5]がある。消去においても、分裂においても、グラフとしては立体交差をつ

[5]グラフを埋め込むことができる曲面のトポロジー。

くり出し、その埋め込みのために必要な曲面の種数は (少なくとも局所的には) 増加する。

3.2 状態と遷移規則

各セル上に配される状態をどう定めるかという問題は、特に挙動を設計する際には重要である。許す状態の数を増やせばその中で細工をするのは容易になる反面、設計外の挙動を知ることは組合せ的に難しくなる。ここでは挙動の設計ではなく、適当に作ったものから意味ありげな構造が発生することを目論んでいる為、単純に状態を０、１で指定することにする。

それぞれが四つの隣接セルを持つ以上、自分、上下左右の五つのセルの状態が次のステップでのセルの状態を定めることになる。すなわち可能なルールの数は、$\{0,1\}^5 \to \{0,1,\mathrm{devision},\mathrm{deletion}\}$ となる可能な写像の全てである[6]。

しかし前節で定めた空間上で、上下左右に対応するものを決めることは実は面倒な問題である。容易される空間が向き付け可能であるかも場合による抽象構造上で、全体的整合性を保ちつつ上下左右のラベルを考えることはそれだけでひとつの問題となりうる。そのためここでは、自分と隣接する四セルの状態から、次のセルの状態を考えることにしたい。隣接四セルを方向に関わらず等しく扱う中で、最も単純と思われるのはいわゆるライフゲームのルールであり、これは隣接近傍と自分の状態の和によって、次の状態を定めるものである。すなわち、遷移規則は、$\{0,1,\ldots,5\} \to \{0,1,\mathrm{devision},\mathrm{deletion}\}$ となる写像の全てとなる。以降便宜的に、消滅を状態２、分裂を状態３と定める。分裂の際に新たに生成されるセルには状態を振ることが要求されるが、これも同種の困難を避けるため、四つ一様に同じ状態をとるとしておく[7]。対称性により、一方を決めれば他方もどれかのルールに登場するため、本稿では一貫して分裂直後のセルの状態は０であるとしておく。

この写像の総数は、$4^6 = |\{0,1,2,3\}|^{|\{0,1,\ldots,5\}|} = 4096.$ となり、全探査するのに手頃な数である。

また、以下の便利の為、これらのルールを以下のようにしての整数で表しておくことにする。

[6]次のステップで分裂するものを devision、消滅するものを deletion とした

[7]分裂を二種類にわけて、一方を全て０の分裂、他方を全て１の分裂等にする等のバリエーションは様々考えうる。

- 自分と隣接セルの状態の和を０から５まで順に並べ、その下に次ステップでのセルの状態を書く。
- 下壇の数を四進数と見倣したものを、十進数に戻したものをルール番号とする（番号は０から 4095 の範囲で振られる）。

例として、和 $(0,1,2,3,4,5)$ に対応する次の状態が $(1,1,0,2,3,0)$ で与えられた場合には、ルールの番号は $1{\cdot}4^5+1{\cdot}4^4+0{\cdot}4^3+2{\cdot}4^2+3{\cdot}4^1+0{\cdot}4^0 = 1324.$ である。

単に一つのルールを指定したいときは、わかりやすさを優先して、和 $(0,1,2,3,4,5)$ に対応した発展状態を左から並べることにしておく。

3.3 時間発展の手順

ここまでをまとめて時間発展の手続きは以下のようになる。i) ルール番号を定める
ii) 初期グラフを定め、セル上に状態を配置する。
iii) ルールにしたがってセルの状態を変化させる。
iv) セルの状態が２もしくは３であった場合には、グラフを局所的に変化させ、必要なら状態を与える[8]。
v) iii) に戻る。

以上のように定められた力学系の性質を、以下で観察していく。

4 時間発展例

前節でも述べたように、この種の単純な設定から興味深い構造が見出されるかは自明のことではない。特にこの設定においては、分裂が構造を持ってセル数を四倍にするのに比して、消滅は非常にローカルな影響力しか持たない。この節では、Graph Automata の中で現われる特徴的な構造を例示する。初期条件は手作りしたものもあり、シミュレーションから見出されたものもある。

[8] ここで全てのセルの隣接セル数は四、状態は０か１のいずれかに戻っている。

4.1　工場的振舞

図3 : 工場的振舞。与えられたグラフが四ステップをかけて元のグラフに戻る。途中、生産物を二ステップにわけて吐き出す。一つの工場的要素が決まった数のユニットを切り離し続ける為、総セル数は時間に比例して増加する。生産物はそれ以上の時間変化を起こさず、固定点に落ち込んでいる。

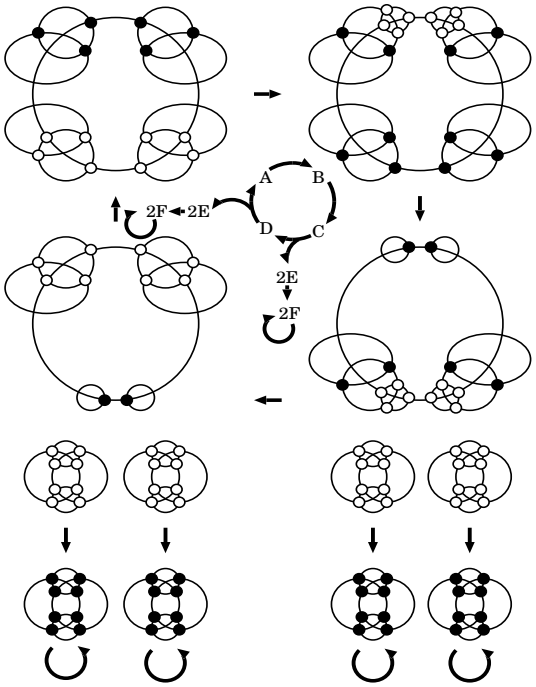


図 3: 工場的振舞。四ステップかけて元に戻る構造が、二ステップにわけて生産物を吐き出す。白丸が状態０、黒丸は状態１を示す (rule: 123131)。

4.2　自己複製グラフ

図4 : 自己複製。今の所最小の構成。上図中央の大きな円が切り離されると同時に、最小の円上のセルが分裂を行う。下図において左右のユニットは非連結成分であり、それぞれが上図と同じ構造を持っている。この場合の複製スピードは１ステップで行われ、セルの数は時間 n に対して 2^n で増加する。

この構造は、グラフが属している空間のフラクタル性を利用して複製を行っており、構造がフラクタル・メッシュを降りていく過程と考えると理解しやすい。ユニットとしてひとまとまりのグラフは四段階の入れ子構造になっており、最大の円が消え去り、最小の円が同じ様式で生成されることによって複製を行っている。鰻を追って空に昇るような仕組みである。

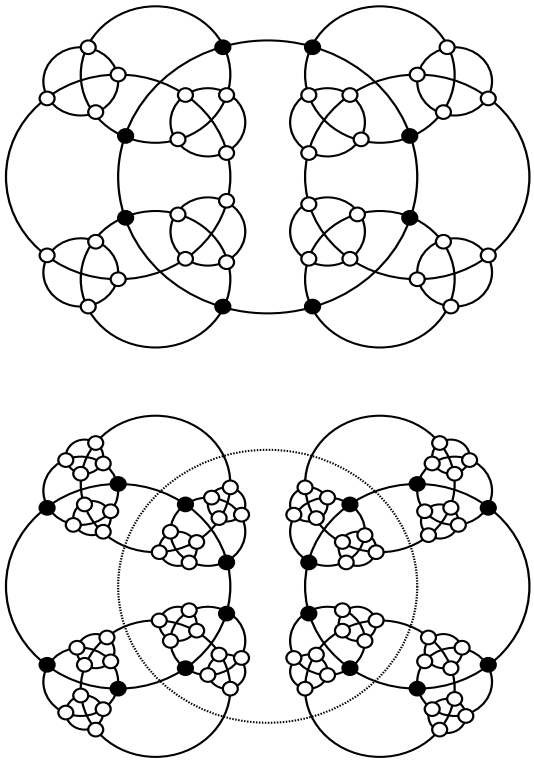


図 4: 自己複製グラフ。上図から下図に時間発展する間に同じユニットが倍になる。白丸が状態０、黒丸は状態１を示す (rule 13*2**)。ルールの中の＊マークは、ワイルドカードを示し、そこに書かれる数字が何であってもよいことを示す。この例においては、どの時間のどのセルにおいても、和は三つの状態をしかとらないことによる。

4.3　自己伸長＋自己複製

この系の挙動が単純な初期条件から始めて複雑なものへ、順々に調べることができるようなものであるならば、話はある程度の単純化を見込むことができる。

最も単純な初期条件は、交差する二つの円の交点の一方にだけセルが配置されたものであるが、これは明らかに面白い挙動を生み出しようがない。次に単純なものとしては、たとえば三つの円と二つのセルによってつくられた初期条件がある (図 5)。図に見えるように、この程度の単純なグラフから始めても、ルールによっては非自明な構造が現われうる。

5　統計的性質

前節においては、この系において、多様な構造が見出されうることを見た。この節では、その種の構造がどの程度自然なものとして見出されるかを調べたい。前節の最後の例からもわかるように、初期条件の複雑さは必ずしも時間発展の複雑さを導くわけではなく、簡単な初期条件からはじめて順に複雑な初期条件について探索を進めることがよい方針であるかはわからない。

ここでは初期のグラフを一つに固定し、可能な配置全てに関しての挙動を調べることを行う。初期のグラフとしては相互に重なりを持つ三つの円を採用し、その上に六つのセルを置いた状況を考える。対称性から、セルの上に {0, 1} を配置したときのバリエーションは八種類あり、うち三つは他の配置の０、１を反転させた配置となる (図 6)。

図中、グラフ下の数字は、4096 種のルール中、100 ステップ目までに非連結成分を生み出したルールの数であり、括弧内の数字は、０、１を反転した初期条件から始めた場合の対応する結果を示す。特に機構をこちらから設計してやらない場合でも、数%のルールに対して、少なくとも分裂という挙動が見えることがわかる。

ルール全体にわたって、分裂がどのように起こっているかを図 7 に示す。横軸はルールの番号を示し、縦軸は非連結成分の数である。適当に配置した初期条件に対しても、少数にせよ分裂過程が見られること、またそれらがひとかたまりに現われることがあることが見て取れる。ひとかたまりに現われる分裂過程は、ルールのコーディングによるものであるが、ルールの部分だけが分裂を司どっていることを示す。

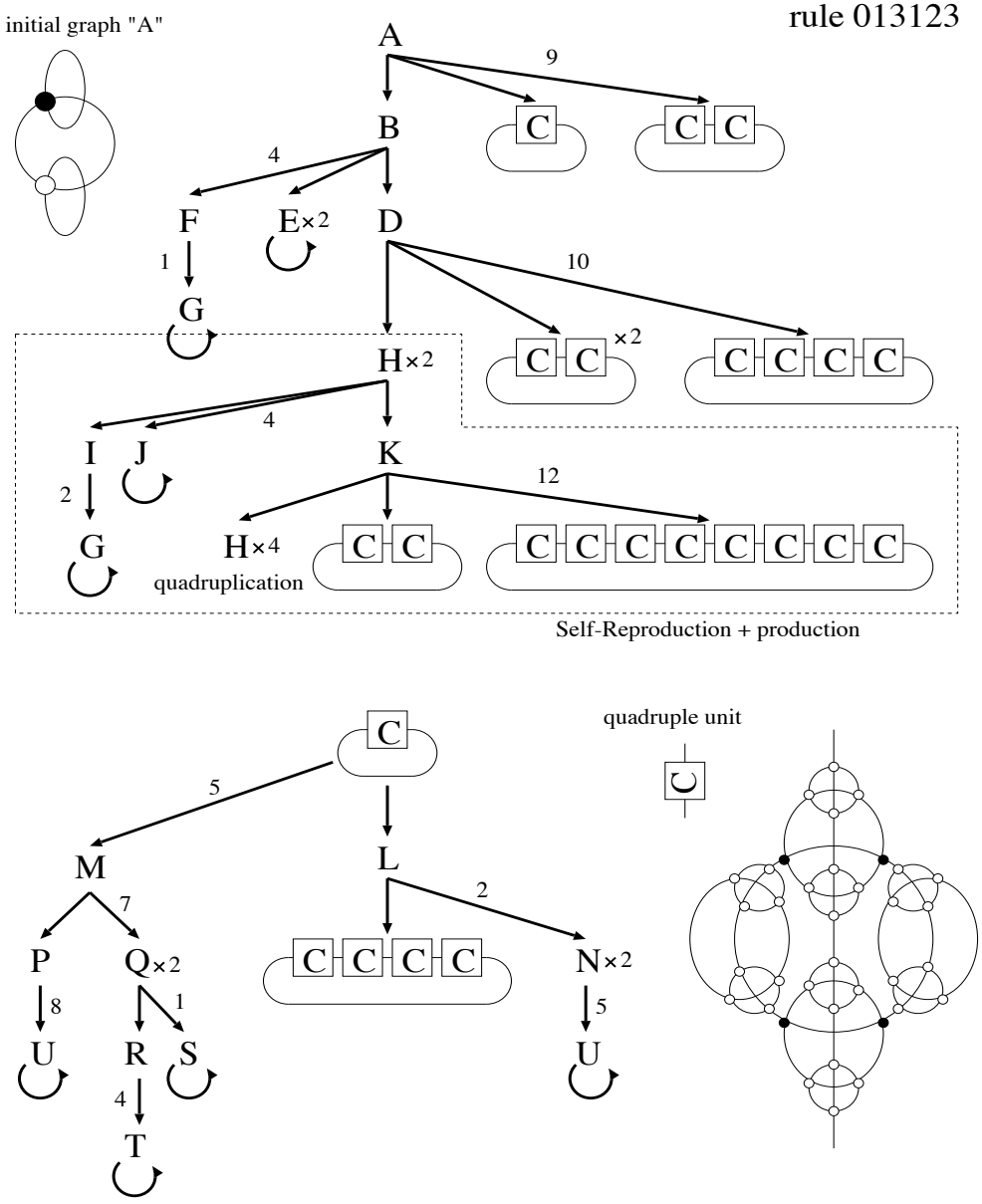


図 5: ある単純な初期条件から始まる時間発展全図。アルファベットはグラフが非連結になった時に、各グラフに対して付け直している。遷移を示す矢印の傍らの数字は、あるグラフが非連結になるまでにかかるステップ数を示している。四角で囲まれた C のグラフは、同じ構造を繰り返して伸びて行く際の基本単位を成すグラフである。上図では H のグラフの自己複製、下図では C のグラフの自己伸長過程を見ることが出来る。H が自己複製する度に C を生み出し、C はそれ自体で伸び続けることに注意。白丸が状態０、黒丸が状態１を示す (rule: 013123)。

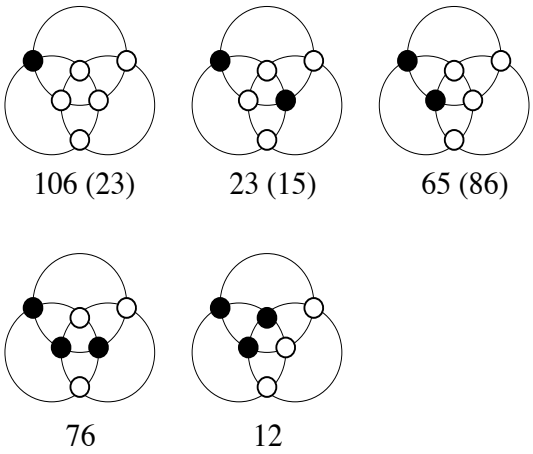


図 6: 初期配置五種。相互に交差する三つの円を配置し、その上の可能な {0, 1} の配置を示す。白丸が状態 0 、黒丸が状態 1 を示す。下の数字は、100 ステップ目までにグラフが非連結になったルールの数。括弧内の数字は、0 と 1 を逆転した配置から始めた場合の結果。

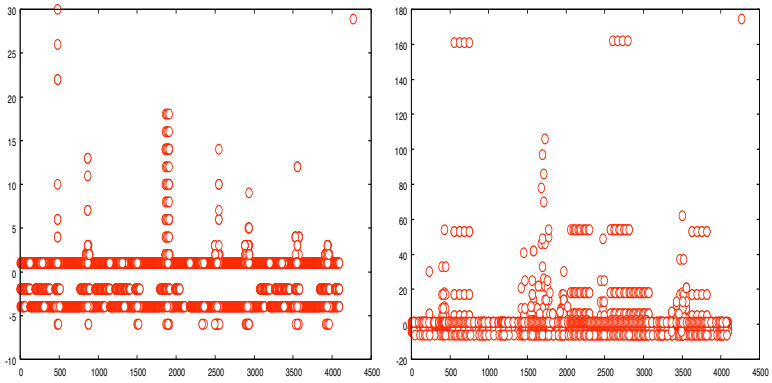


図 7: それぞれ、上図中央、上図左側の初期条件に対し、4096 個全てのルールを適用した場合の初期時間発展の重ね描き (10 ステップ)。横軸がルール番号。縦軸は非連結グラフの数。少数ではあるものの、適当に配置した初期条件からでも、分裂過程が見られることを示す。

以上のように、この系においては、適当な初期値からでも分裂、複製等の挙動が現われうる。

6　ノイズに対する安定性

セル・オートマトンは非常に離散性の高いモデルであり、一つのセルで起こった状態変化が、系全体の挙動を変化させることは頻繁に発生する。ここでは、図 4 に示した自己増殖するグラフの一点で状態を一回だけ反転[9]することにより、系の挙動がどのように変化するのかを見る。

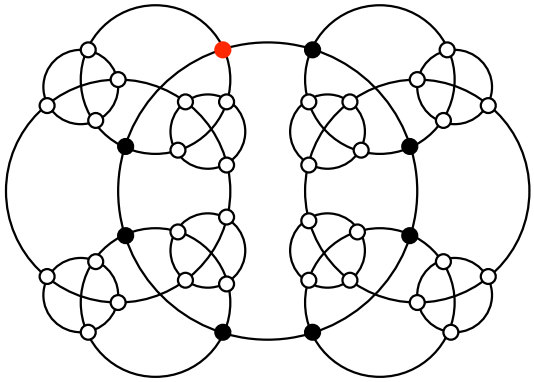


図 8: 初期状態と状態反転位置。

図 8 は自己増殖を示すグラフであるが、図中赤で示したセルの状態を反転させた結果を、図 9 に示す。

図 9 は横軸を状態を反転させてからの時間ステップ、縦軸を連結なグラフにおけるエッジからなる円の数を図示したものである。状態反転がない場合には、円の数は一定 (15) のままであるが、反転を行ったことにより、形の異なったグラフが出現する。下部のアルファベットは非連結成分を示し、付されている数字は、連結なグラフの数である。

ここで特徴的なのは、反転後、i) もとの自己複製グラフへ戻る挙動 ii) もとの自己複製グラフからははずれるものの、別の自己複製ループに落ちるグラフの出現である。

i) の挙動の原因となるのは、分裂のルールが対称的 (生成されたセルの状態が均一であること) であること、この系自体が、対称性を強めて行く方向へ時間発展する傾向があることによると考えられる。

[9] 0 を 1 に、1 を 0 に変更する。

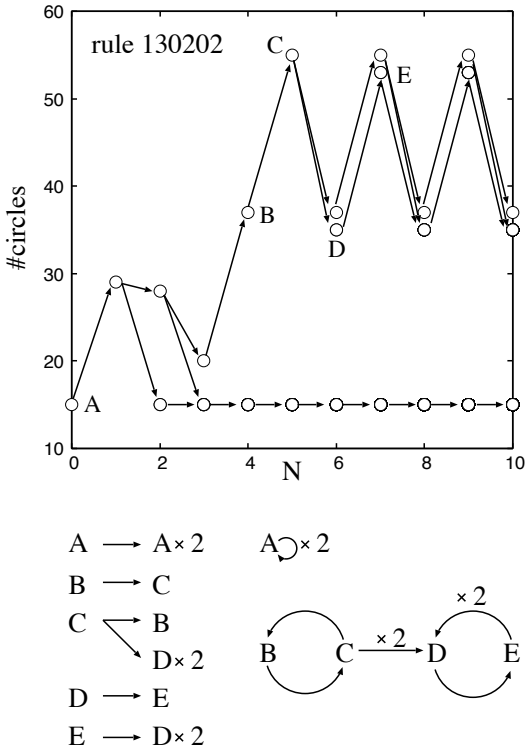


図 9: 反転後の挙動。横軸は反転後の時間ステップ数、縦軸は連結成分を成す円の数である。分離したグラフについて重ね書きされている。下部は、状態反転からの連結成分の遷移図であり、複製ループの近傍にまた複製ループが存在することを示している。

ii) の挙動は、用意されている空間がフラクタル状であることにより、補償されている可能性がある。もともと自己複製がフラクタル・メッシュを降りて行く形で持続することに注意する。この系は状態発展とともに空間をつくり出して行く系であり、自己増殖構造においては、生み出していく空間の性質とその上の状態が共同している状況にある。その意味で自己増殖構造はいわば繰り込み固定点と似たような構造を持つが、ここで見られた結果からイメージを膨らませるならば、この系では繰り込み固定点の近傍にまた他の繰り込み固定点のベイスンが存在しているような状況にあることが予想される。

7　まとめと議論

7.1　まとめ

本稿では、自分が乗っているグラフの形状を書き換えていく、グラフ上のセル・オートマトンについて解説を行った。この種の局所的な同時書き換え系は、各所でルールの適用順といった問題をひきおこしがちであるが、それを単純な形で定めることができることを示した。

元の Graph Automaton においては、計算能力や複製能力の設計が主であったが、ここで目指されたのは、その種の機械的原理の実装ではなく、おおらかに定めたものがおおらかに挙動するような形でのパターンの形成である。

見出されたものは、この系においては、ある程度適当に定めた初期条件から一定の割合で特徴的な構造が出現するということであり、中でも特徴的なものは、自己複製過程と自己伸長過程である。これら構造はフラクタル状の空間構造を利用したものであり、その空間を自分の状態で降りて行くことにより、その種の挙動を生み出していく。

その挙動において、系は対称性を回復していく形で時間発展をすることが多く、このことは分裂の対称性によるが、それによっても、ある安定な構造へと向かい、安定な構造が密に安定する可能性が存在する。

問題、改善点としては、この系におけるグラフが非連結なものとして分離した場合に、分離した相互のものは最早相互作用を持たないことが挙げられる。これは全体の構造がフラクタル状のグラフを辿ることに起因しており、為に一つ一つの連結成分としての挙動に面白みが見られて

も、全体としての挙動としては面白みを欠く部分が存在する。これを改善する方法は様々考えうるが[10]、今のところ小綺麗な系としてまとまったものは見出せていない。

また現状では、この系における極限挙動も計算機資源上判明していない。有限状態から始める以上、無限に変化し続ける解は存在しないようにも思われるが、なにぶん離散性の強い自由度変化力学系である以上、断言はできない。取扱がそれほど面倒ではない自由度変化系の一例として、念頭に留めて頂ければ幸いである。

7.2 議論

大自由度系に取り組むにあたり、一見特殊とも思えるような力学系の考案、観察の積み上げが必要なのではないかというのが、個人的な見解である。ここでは、自由度と自由度の乗る空間の相互作用を陽に持つモデルを考えたが、余程の低次元系でもない限り、ある意味で全ての数理モデルはそのような側面を持つことも確かである。

大自由度において特徴的に現われるかもしれない構造に、このような手法で接近できるのかは、別に何かの保証あってのことではない。ただ、見知らぬものを漠然と発見することは単純に困難であり、見知らぬものへの準備として、少なくとも発端において奇妙と思えるような力学系を設計し続けることは意味のあることだとは私見であるにすぎない。

謝辞

本研究は、21 世紀 COE プロジェクトの一貫として行われた。研究会開催には北海道大学電子科学研究所の御助力を頂いた。有益な議論を頂いた立川正志、星野英一郎氏他に感謝したい。

参考文献

[1] K. Tomita, H. Kurokawa, S. Murata, Graph Automata: natural expression of self-reproduction, Phisica D 171 (2002) 197-210.

[10] セルの数の総量規制や、セルの時間的な死、栄養成分の付加、ランダム性の導入、過去のエッジを記憶する等々。

力学系は情報を表現するか？

脳活動から見た大自由度力学系における情報の表現

伊藤淳司*

2006 年 7 月 18 日

1　脳は情報を表現するか？

現在の脳科学においては, 脳神経系の行う情報処理に関して「低次領野は外界の情報を表現し, それに基づいて高次領野が情報処理を行うことで適応的な行動が発言する」という見方が支配的である. そのような見方が最もうまく当てはまると考えられているのが視覚系の情報処理である. すなわち, 網膜から入った視覚刺激は外側膝状体 (LGN) を経由して第 1 次視覚野 (V1) へ投射し, そこで視覚刺激に含まれる線分の向きや, 線分の移動する方向の情報が表現され, それらの情報を高次領野が参照し, 加工することでより複雑な情報の表現が構築されていくと考えられている.

しかしながら近年, そのような見方に疑義を呈するような実験結果がいくつか報告されてきている.

例えば視覚系の各領野間の結合様式に関して,V1 への入力投射全体に占める LGN からの投射の割合は 10-15% ほどでしかなく, 残りの大部分は高次領野からのフィードバック入力であることが報告されている [1]. また,LGN についても, 入力全体に占める網膜からの入力の割合はわずか 5-10% ほどでしかなく, 残りの入力は局所的な抑制性の入力,V1 からのフィードバック, そして脳幹からの入力がそれぞれ 30% づつを占める [2]. このように視覚系はフィードバックループが何重にも重なった系であり, 単純に外部刺激の伝播の段階にそって情報の「送り手」と「受け手」とを分離し, 一方が情報を表現し, 他方がそれを参照するという関係を想定することは困難であると考えざるを得ない.

また,V1 における神経活動が実際には外界の情報を忠実に反映しているわけではないという実験結果も報告されてきている. Kenet らは, ネコの視覚皮質において, 外部からの視覚刺激がない状況でも V1 では方位選択性マップ様の活動が生じており，様々な方位に対応する活動の間を自発的に遷移するという現象が見られることを報告している [3]. また Fiser らは, フェレットの視覚皮質において, 視覚刺激提示時の活動と非提示時の自発活動と観測し, 神経活動の時間/空間相関に視覚刺激の有無から予測されるほどの違いが認められないことを報告している [3].

これらの報告は，脳活動全体に占める自発的活動の割合が従来考えられていたよりもずっと大きいこと, 従来「情報表現」と考えられていた活動が自発的活動の中に頻繁に見られること、外部刺激は自発的活動の統計的性質に大きな影響を与えないこと等を示しており、従来の「低次領野は外界の情報を表現し, それに基づいて高次領野が情報処理を行うことで適応的な行動が発言する」という見方から、「活発な自発的活動を外部刺激が modulate することによって適応的な行動に対応する自発的活動が選択される」という, 脳神経系に潜在

* 理化学研究所 脳科学総合研究センター 認知動力学研究チーム

する自発的活動に重きをおく見方への再考を促すものと捉えられる.

2 「情報表現」から「状態遷移」へ

このように, 従来「情報表現」として見られていた神経活動は, 実際には「自発的活動のレパートリーの一部が外部刺激によって強調されたもの」として捉えるほうが妥当であることが明らかになってきている. ここではその「自発的活動のレパートリー」を「状態」と呼び, 従来は「情報表現」をベースにして捉えられていた脳神経系の情報処理の様式を、「状態」をベースにして捉えなおすことを試みる.

「状態」をベースにした情報処理様式の記述は、簡単には以下のようなものになるだろう.

- 外部刺激がない状況では系は様々な状態間を自発的に遷移する
- 系内の部分系はそれぞれ異なる状態を取り得るが、互いに強く couple している
- 外部からの刺激により入力系の自発的な状態遷移は制限される
- 各部分系が相互に制限しあうことで出力系の状態が決まり、行動が発現する

即ち、自発的に生じる「状態遷移」と、外部刺激によるその制限が中心的なプロセスとなる.

また、情報処理の観点から、個々の状態に対して以下のように「安定性」と「不安定性」という相矛盾する性質が同時に要求される. 即ち,「安定性」を要求する条件として

- 似た外部刺激に対しては同じ状態が選択されてほしい
- 弱い刺激に対してでも一定の状態が維持されてほしい
- 行動の遂行には一定の状態がある程度持続することが必要

等が考えられ、「不安定性」を要求する条件として

- 外部刺激のない状況では様々な状態が一様に表れてほしい
- 曖昧な外部刺激に対しては特定の状態に留まることは避けたい
- 行動を遂行した後は速やかにそれまでの状態を脱したい

等が考えられる.

これらの要求を同時に満たすような状態遷移のダイナミクスとして第一に考えられるのは, **低次元アトラクタ (痕跡) 間の離散的遷移過程**であろう. 即ち，安定性は各アトラクタ (痕跡) の (meta)stability が担い, 不安定性はそれらの間の遷移過程が担うということである.

3 脳活動に見られる離散的状態遷移

そのような離散的な状態遷移過程は実際の脳活動に見られるのであろうか？ここではヒト被験者の脳波活動がそのようなダイナミクスを呈するという報告をいくつか紹介する.

Freeman らは閉眼安静状態のヒト被験者の前頭部及び側頭部から脳波活動を計測し, 複数の周波数帯域における位相パターンの時空間ダイナミクスを解析した [5]. 頭皮上の各点における位相のダイナミクスは, 位相変化がほぼ一定な状態がしばらく続いた後, 瞬間的に激しい位相変化 (位相スリップ) を生じ, その後またほぼ一定な位相変化の状態に戻る, という過程を呈するが,Freeman らはその位相スリップが時間的・空間的に同期して生じること, また，各周波数帯域ごとに異なる時空間同期パターンが見られることを報告した.

また Schack は数学の問題を解いている最中の被験者のベータ帯域 (13-20Hz) 脳波活動を計測し, 頭皮上の各点の活動間の同期が示すパターンが離散的な遷移を示すことを見いだした [6]。その遷移のダイナミクスは, 同一被験者であっても解いている問題の種類によって異なり, また数学の能力が異なる被験者の間では, 同じ問題であっても遷移のダイナミクスに違いが見られることなどが報告されている.

これらの報告から, 離散的な状態遷移過程が実際に脳活動に見られることが明らかになってきたが, その動的・統計的な性質はいまだ充分に特徴づけられていない. これを踏まえ,Ito らは閉眼安静時の脳波の主要成分であるアルファ帯域 (8-13Hz) 活動を計測し, その位相パターンのダイナミクスを定量的に特徴づけることを試みた [7]. 位相パターンは準安定な状態間の離散的遷移を示し, 短い時間スケールではランダム性の強い遷移を呈するが、各パターンの出現頻度には偏りがあり, その偏りが長い時間スケールで変動することが見いだされた. この位相パターン出現頻度の偏りの変化のタイムスケール (∼10s) は, 基盤となっているアルファ活動のタイムスケール (∼0.1s) より 100 倍も長く, このような長時間スケールのダイナミクスは, 出現しやすいパターンによって特徴づけられる各「状態」間のカオス的遍歴を表しているとも考えられる。

4 まとめと議論

以上、本講演の内容をまとめると以下のようになる.

- フィードバックループが複雑に絡み合った系においては「情報表現」という概念は適切ではない
  - 何が表現を参照するのかを明確にできない
  - 何を表現しているのかを明確にできない
- (脳においては) 外部刺激は活動を drive するのではなく自発的活動を modulate するにすぎない
- (脳においては) 自発的活動は準安定な状態間を離散的に遷移するという形で表れる
- 遷移のダイナミクスは認知タスクや被験者の能力によって異なる
- 安静状態の α 帯域活動においてカオス的遍歴様の遷移過程が見られる

また, これらの知見から, 今後議論すべき問題として以下のものが考えられる.

- 脳以外の系ではどうか？
  - 自発的活動が観測されるか？
  - それはどのようなダイナミクスか？
  - 離散的状態を持つか？
- どのようなモデルを考えればいいか？
  - 自発的活動を持つ
  -「環境」と couple し、「機能」を持つ
  - coupled CI？ subsumption？
- カオスである必要はあるか？
  - metastability + noise で充分？
  - SOC では状態を記述できないので不十分
  - 自発的活動のゆらぎからどれだけ系の情報が取りだせるか

参考文献

[1] Benshalom, White, *J. Comp. Neurol.* **253**, 303 (1986).

[2] Van Horn et al., *J. Comp. Neurol.* **416**, 509 (2000).

[3] Kenet et al., *Nature* **425**, 954 (2003).

[4] Fiser et al., *Nature* **431**, 573 (2004).

[5] Freeman et al., *Hum. Brain Mapp.* **19**, 248 (2003).

[6] Schack, *Int. J. Bifurcat. Chaos* **14** 793 (2004).

[7] Ito et al., *Hum. Brain. Mapp.* accepted.

細胞ダイナミックス研究の現状

藤本仰一 （東大総合文化、ERATO）

もくじ： 細胞内レベルで、大自由度ダイナミックスが見れるようになってきた。
ダイナミックスと細胞が絡んだ研究は、この先、どう展開していったら楽しいか？

1. **蛍光タンパク：１細胞の遺伝子発現をある程度長時間トレースできる、細胞集団の分布ダイナミックスをトレースできる。**
2. **Plate reader ：96個のプレート（の細胞数やある遺伝子発現）を同時に自動的に計測できる。**
3. **データベース解析からダイナミックスや普遍性を抜き出せるか？**
4. **パターンやダイナミックスに注目したデータベース構築（澤井、Reinitz）**
5. **自分達の研究： 機能（パターンダイナミックス）、ネットワーク、進化を結びつける → 形態形成とその進化の理論研究**

1. 遺伝子発現を蛍光ラベルして観察する：一細胞ごとや集団の分布として

細胞の個性（揺らぎ）を測る Elowitz,et.al, Science (‘02), Becskei, Oudenaarden, Nature Genetics (‘05)

life cycle（発生過程）は位相空間の軌道として、どう表現されるか？

Bistability in artificial lac system — Ozbudak,Thattai,et,al, Nature 427(‘04)737

双安定ポテンシャル描像では、遷移の方向は**対称**に。

細胞分化過程は興奮系と同様の性質をもっているのではないか？（枯草菌） Suel, Garcia-Ojalvo, Libeman, & Elowitz, Nature(‘06)

過渡的な安定性：Limit cycle と異なり、ある程度大きなノイズがないとcompetence状態 から出て行かない。

分化の方向性：Competence状態(ComG,ComK発現)への入口と出口は異なり**非対称**で、それぞれには方向性がある。

2. より大自由度のダイナミックスを見る。

プレートリーダーの利点:プレートごとにパラメータ(環境条件)を変えたり、蛍光ラベルする遺伝子を変えたり、遺伝子(変異体)を変えたり、等々して、計時変化の自動計測ができる。

例1:多数の遺伝子は、どのように調整をとって、器官を作り上げるか?

E.Coli Flagella gene networkで、各遺伝子のpromoter activity dynamics をsystematic に調べる。

Kalir and Alon, Cell ('04):　Kalir,et.al, Science 292 ('01) 2080

Promoter activity / cell = $\frac{1}{OD}\frac{dGFP}{dt} \approx \frac{dGFP}{dOD}$

GFP:細胞集団全体の蛍光強度

この時系列を様々な遺伝子について追跡できる。

例2:様々なストレスに対して増殖率の"landscape"を描いてみる

Kishony, Leibler, J.Biology,2('03)14

動機: 変異は、どの程度有利(alleviated)で、どの程度有害(aggravated)なのか?

実験:　多数の変異体を作成し、プレートリーダーの各wellごとに別々の遺伝型(変異体)と環境条件の組み合わせにして培養し、wellごとに増殖率を測定し、そのlandscape を描いてみた。

結果:stressに応じて、landscape が異なる。変異は有利な場合と有害な場合とがある。

ここまでのまとめ。

遺伝子発現の大自由度ダイナミックスは見れるようになった。

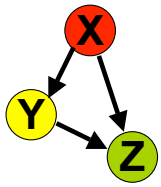
実験的な研究を進めるにも、理論的な視点が必要に感じる。

実験的なアプローチは爆発的に増えているが、理論的なアプローチは少ない。

また、神経系におけるシンクロコーディングやレートコーディングのようなパラダイムもまだ出てきてない(たとえば揺らぎの効用についてなど)。(そういう意味で未熟)。

３．**データベース解析からダイナミックスや普遍性を抜き出せるか？**

Network motifs (Milo et. al. 02)
in the transcriptional network of *E. Coli and yeast*



sub-structures which appear in the network more often than randomized networks

Feed-forward Loop (FFL)

They are found to be abundant, but it is not clear

- Why so abundant in the network?
- Are they building blocks of the network?
- Do they help us to understand biological functions?

４．パターンやダイナミックスに注目したデータベース構築

細胞性粘菌の発達過程での時空間ダイナミックス：　変異体ごとの違いを観察

Sawai,et.al,Nature(‘05)

Reinitzたちのデータベースとモデル研究　　http://flyex.ams.sunysb.edu/flyex/

様々な遺伝子の空間パターンを様々な発生ステージで計測。
用いたショウジョウバエの**遺伝型は同じ家系**。

これから、初期発生過程に於ける遺伝子発現の空間パターンダイナミックスのモデルを再構成。

5. 機能や進化といった生物のキーワードと、ネットワークやダイナミックス
といった複雑系のキーワードをどう絡めていったらよいだろう？

パターンダイナミックス過程を機能と見なす（形態形成過程）。

ネットワークの進化ダイナミックス
（進化的遷移、発生拘束の発現）。

Morphogenesis of *D. melanogaster*

Gene expression patterns in *Drosophila* embryo

Can we explain the gene expression patterns based on the complex network regulations, especially FFLs?

Function of Feed Forward Loop (FFL)

- Fixed number of stripes
  c.f. Turing mechanism, sloppy for the number of stripes
- robustness against perturbations in parameters
  - Structure is preserved as long as the order of the thresholds are not changed
- Feed-back loops, mutual regulations are necessary for stable morphogenesis (proportion, etc.)

- **Pattern formation by the interacting FFL networks**
- They work in the morphogenesis of *D. melanogaster*
- This gives the reason of FFL abundance

remarks

- **Many FFLs are also found in the regulations for the segment-polarity genes and homeotic genes** (down-stream processes of development)
- **Extension to the networks with feedback loops**

Function of cross-talking FFLs

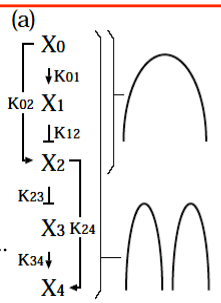
Output Z expresses within multiple ranges of X expression levels

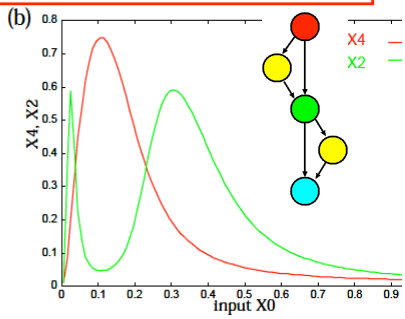
Ex.1:Sequential FFLs →

• X_4 is activated in multiple ranges of X_0 expression level

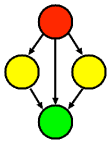
• doubling the activation of X_2

1 → 2 → 4 →





Ex.2:Parallel connection of FFLs



・Z is activated in multiple ranges.

・The ranges are determined by the thresholds of each pathway

非線形サイドからのFeed Forward Loop によるパターン形成機構への期待:

パイコネ機構がネットワーク方向に埋め込まれている。

パイコネでパターンが作れる。

パイコネによるマルチスケールパターン形成。非線形性による階層性の記述ができてる。

マルコフ分割による体節の個性の説明が出来る？

パイコネの構成法は、Boolean 的でいわゆる分子生物的な見方を表現していて、カオスのイメージと相反している。

この相反のところに、Turing patternの意義が出現？

ムカデ型(short germ)からハエ型(long germ)への進化の構成的理解に向けて

発表内容:

進化発生モデルの導入

人工的な進化を通して、実際の発生過程に対応する2種のパターン形成過程が現れてくる。
(パターン形成過程、network topology, knockout response, etc)

ストライプ毎の役割の多様性と発生タイプの関係性。ハエ型のほうが個性が高くなる必然性。

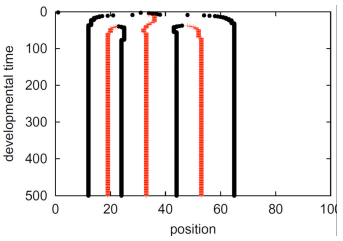
	Phenotype: pattern formation	Stripe number control	Genotype: network topology
Short germ	一つずつ時間振動有	いい加減	FBL
Long germ	同時に全部時間振動無	きっちり	FFL

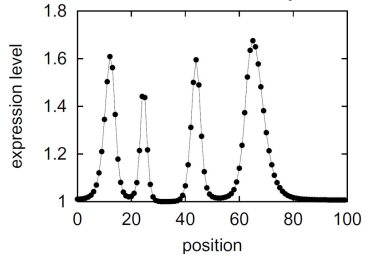
ムカデ(祖先型): ストライプは、1つずつ生成。成虫個体間でもストライプ本数のばらつき有。 各ストライプの役割(運命)はほぼ同じ。

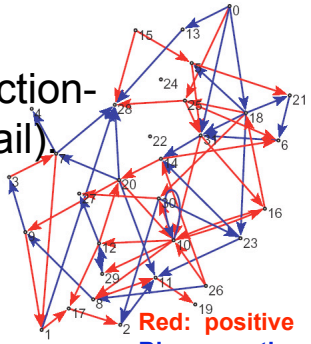
ショウジョウバエ(進化型): 同時に多数のストライプが生成。個体毎のストライプ本数のばらつき無。各ストライプの役割は異なる。

Model for development

Network composed of 32 genes with reaction-diffusion process in 1-dimension (head-tail).







※maternal factor (gene 0) with spatially exponential gradient.

Formulation of the regulations

For a single regulation X→Y

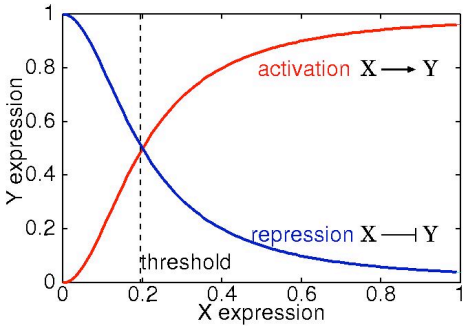
$$\frac{dY}{dt} = -Y + f_Y(X, K_{xy}) + D_y \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

diffusion

$$f_X(X,K) = \frac{X^H}{X^H + K^H}$$ for activation

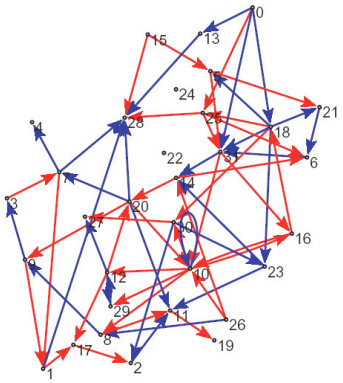
$$f_X(X,K) = \frac{K^H}{X^H + K^H}$$ for repression

H: Hill coefficient



Model parameters

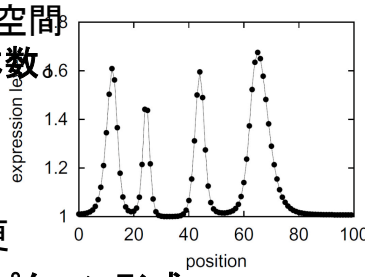
- **Connection** (regulation) among nodes (genes). (including auto-regulation).
- Threshold value (Michaelis constant) for each regulation ***K***.
- **positive / negative** regulation.
- Diffusion constant ***D*** for each node.



Evolution toward multiple stripe formation

☆ 表現型: あるgene (**output gene**) の発現空間パターン: ストライプに現れる **ストライプの本数**

★ **Target**のある本数 ***Ntar.***

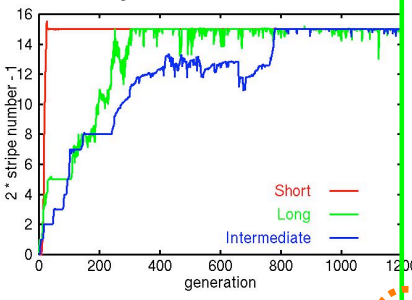


進化の一世代

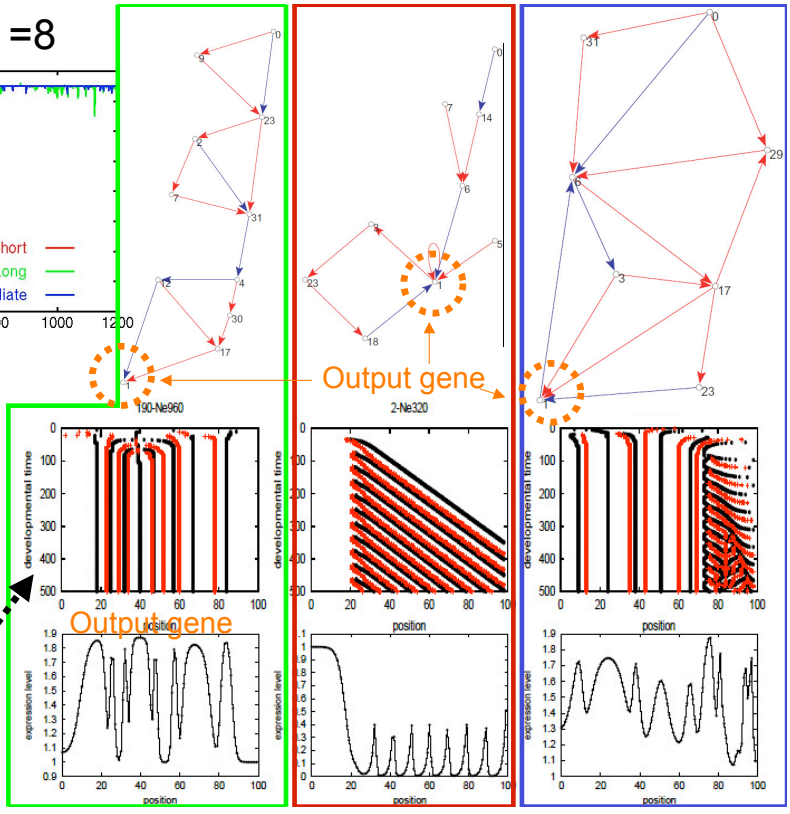
- **変異:** **変異率** μでモデルパラメーターを変更
- **発生過程:** 32成分反応拡散方程式による**パターン形成。**
- **淘汰:** ***Ntar*** に近い表現型を持つ遺伝型が**生き残る。**

※ node数、connection数は進化を通して変わらないとする。

Example :***Ntar*** =8



進化の結果現れた発生過程と”core network”



black: local max
red: local min

まとめ

Type	Pattern formation	Spatial Hierarchy	knockout response	Network topology
Short germ 単純	数の制御いい加減。 時間振動	必要ではない	単純	FBL
Intermediate germ	有部のストライプに、時間振動有	？	多様	FBL + FFL
Long germ	数の制御きっちり。 時間振動無	必要	多様	FFLs

Post Google 時代の研究手法 — 研究のネットワーク解析

行木孝夫
北海道大学大学院理学研究院数学部門

2006 年 6 月 29 日 NAND

1 PageRank と Perron-Frobenius の定理

Perron-Frobenius の定理とは、実正方行列が既約な非負成分から定義されている場合、実単純な最大固有値を持ち、対応する固有ベクトルの各成分は正であるという定理である。特に確率行列の場合、この最大固有値は 1 である。

Markov 連鎖などにおいて主要な道具であり、無限次元版である力学系の転送作用素に関しても次のように同様の主張が成立する。

力学系 $T : X \to X$ について、$L_f : C(X) \to C(X)$ を次で定義する。

$$(L_f g)(x) = \sum_{y \in T^{-1}x} \exp(f(y))g(y)$$

このとき、リフシッツ連続な関数全体へ制限すると最大固有値 λ は実かつ単純で、固有関数 h は非負。かつ $L_f^n/\lambda^n g \to h$ である。

Google はこの定理を web ネットワークに適用した。詳細は「Google の秘密」[1] 参照。N_{ij} を「i から j へのリンクの有無」と定義する。確率行列を次のように作り、適切に既約化する。

$$M_1 := (N_{ij}/N_i), N_i = \sum_j N_{ij}$$

M_1 の固有値 1 に対応する固有ベクトルの成分が PageRank である。

2 共起性とネットワーク

引用ネットワークにも応用できるはず、というのは自然な発想で、実際にやられてもいる [2]。しかしながら、データはどこから取得するか、固有ベクトルは求まるのか、などの問題を生じる。別の方針を考えることにする。

2.1 分類の共起性

物理、数学だと常に分類を指定する。例えば PACS, MSC。これを用いてみよう。

OAI-PMH によって arxiv.org からメタデータを全て取得する。やろうと思えば PubMed でもできるかもしれない。一本のプレプリントが指定する分類に着目した共起ネットワークを次のように作成する。

まず N_{ij} を次で定義する。

$$N_{ij} := \#\{ \text{分類 } i, j \text{ を同時に指定するプレプリント } \}$$

これを規格化する。

$$M_0 = (N_{ij}/\sqrt{N_i}\sqrt{N_j})$$

スペクトル半径を考える。まず次が成立。

$$trace(N_{ij}/\sqrt{N_i}\sqrt{N_j})^n = trace(N_{ij}/N_i)^n$$

つまり $spec(M_1) = spec(M_0)$ であり、系として $r(M_0) = r(M_1) = 1$ である。

したがって、M_0 に関しても PageRank の議論を適用できる。

2.2 分野ごとのプレプリント数

図 1 と図 2 とは arXiv の分野別プレプリント数をプロットしたものである。図 2 から、指数分布になっていることがわかる。つまり、高々5 分野程度でほとんどのプレプリントを占めている。

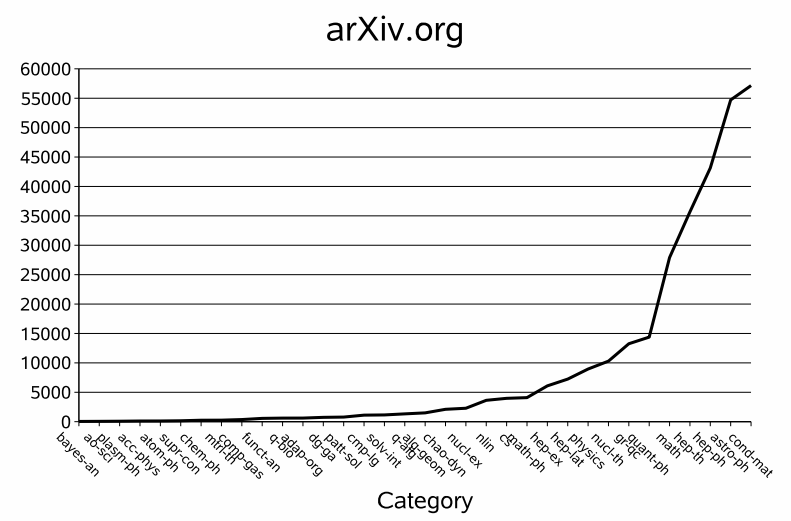


図 1: arxiv.org 分野別プレプリント数

図 3 と図 4 は arXiv および数学関連ジャーナルのポータルである projecteuclid.org における分類別の度数分布である。これも同様の傾向が見てとれる。projecteuclid.org の上位数件については、確率論、統計学を中心とするポータルという点による偏りであると解釈する。

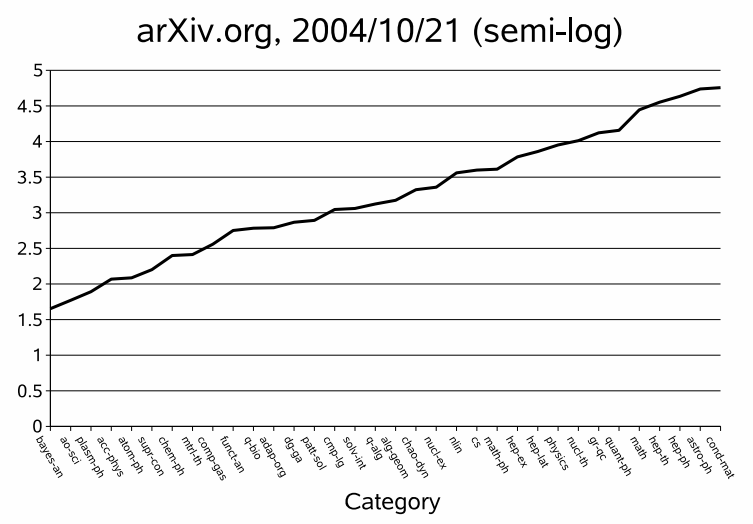


図 2: arxiv.org 分野別プレプリント数 (片対数)

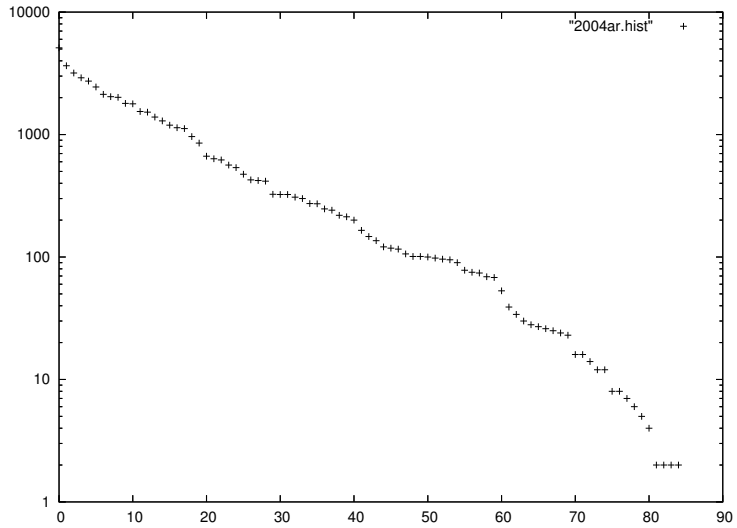


図 3: arxiv.org 2004 年の分類 (主題) 別頻度分布

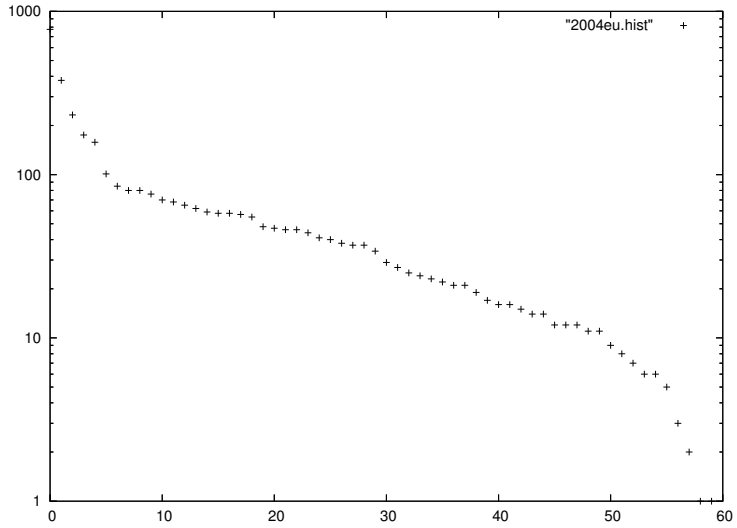


図 4: projecteuclid.org 2004 年の分類 (主題) 別頻度分布

2.3 ネットワーク構造

共起性によるネットワーク構造を見ておこう。分類に対する頻度分布は指数分布であり、対称性から辺の数の分布も同じじである。固有ベクトルの分布も同様。

次が成立する。

$$(N_i)(N_{ij}/N_i) = (N_i)$$

つまり、対称な共起ネットワークについて PageRank は頻度に比例する。

結果としてはトリビアルであるが、検証すべきことは多い。図 5 は共起ネットワークを Graphviz によって描画したものである。主要 4 分野のクラスタ形成がよくわかる。図 6 は図 4 を国内発行誌に限った度数分布である。これに限ってべき分布を見せており、理由は不明。

3 考察

研究分野別の論文が含む分類による共起ネットワークを考えてきたが、指数分布が標準的に見える。特殊な場合にべき分布が現れた。

期待した PageRank 的解析に関しては、対称性があるとリンク数それ自体が PageRank になっていると簡単な解析的手段によって示された。つまり、非対称性が PageRank を支えていたと理解される。

今後の問題として、無限次元での同様の結果を考えることができる。また、カーネル法によって注目が集まっている $(id - zM_0)^{-1}$ との関連で、ゼータ関数 $\det(id - zM_0)^{-1}$ の役割を見たい。

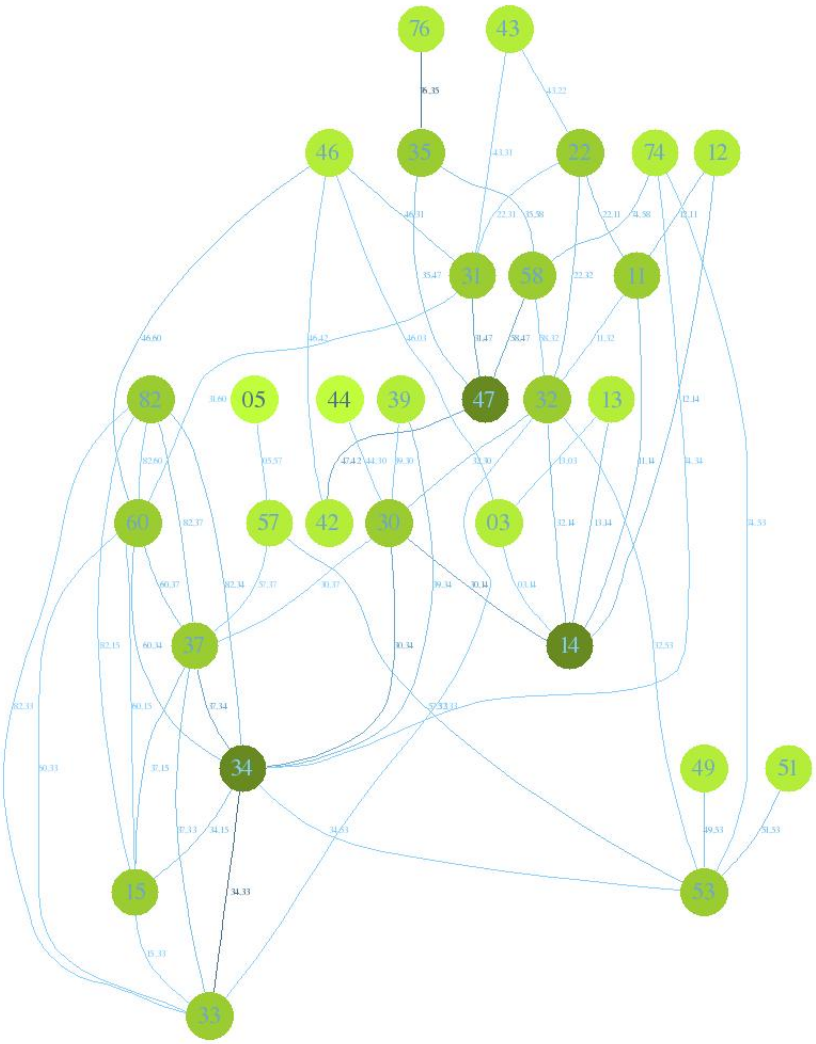


図 5: projecteuclid.org における国内数学ジャーナル掲載論文の分野間相関図

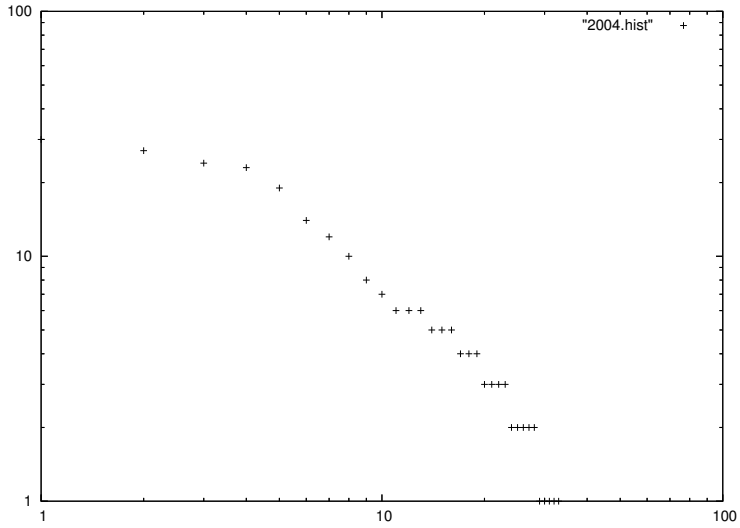


図 6: projecteuclid.org 国内数学ジャーナル掲載論文の分野に関する頻度分布

参考文献

[1] 馬場肇 「Google の秘密 PageRank 徹底解説」http://www.kusastro.kyoto-u.ac.jp/~baba/wais/pagerank.html (2006 年 11 月 29 日アクセス)

[2] physics/0604130