# Syllabus Functionaalanalyse

T. H. Koornwinder, thk@science.uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, Universiteit van Amsterdam,

najaar 2005

## 1 Inleiding

Dit is de syllabus van het onderdeel Functionaalanalyse van het vak Lineaire Analyse. Voor het andere onderdeel Fourier-analyse van dit vak zal gebruik worden gemaakt van het boek Stein & Shakarchi [10]. De huidige syllabus is een grondig gewijzigde versie van de eerste hoofdstukken van de syllabus Functionaalanalyse van J. Wiegerinck (1994, gewijzigd 1997, gewijzigd door T. H. Koornwinder in voorjaar 2005).

Stukken met het hoofdje "Opmerking*" (dus met een ster) betreffen diepergaand materiaal, dat niet tot de standaardstof wordt gerekend. Evenzo behoren vraagstukken met het hoofdje "Vrst*" niet tot de verplichte stof.

Belangrijke voorbeelden van Banach- en Hilbert-ruimten die gebruik maken van Lebesgue-integratietheorie kunnen hier aanvankelijk nog niet behandeld worden, omdat de noodzakelijke voorkennis in het parallel lopende college Integratietheorie aan de orde komt. Aan het eind zullen deze voorbeelden ($L^p$-ruimten) toch nog behandeld worden, in de hoop dat de studenten dan voldoende gevorderd zijn met integratietheorie.

Naarmate er in dit vak meer over Fourier-analyse behandeld is, kan de wisselwerking tussen Fourier-analyse en functionaalanalyse ook beter belicht worden.

Functionaalanalyse is in zekere zin lineaire algebra op oneindig-dimensionale vectorrruimten waarop een zekere topologie ligt, bijvoorbeeld afkomstig van een door een inproduct geïnduceerde norm. Het vakgebied is in de afgelopen 110 jaar tot ontwikkeling gekomen. Het ging aanvankelijk niet om de generalisatie van lineaire algebra maar om het oplossen van lineaire differentiaal- en integraalvergelijkingen. Beschouw eens de vergelijking

$$f'(t) = g(t), \quad t \in [0,1] \tag{1.1}$$

waar $g$ een gegeven functie is en we $f$ moeten vinden. De oplossing is hier simpel, $f(t) = \int_0^t g(s)\,ds + c$. Voor algemenere differentiaalvergelijkingen is een oplossing niet zomaar op te schrijven. Wat is de relatie met lineaire algebra? Bekijk

$$D : C^1([0,1]) \to C([0,1]), \quad D(f) = f'. \tag{1.2}$$

De ruimten $C^1([0,1])$ en $C([0,1])$ hebben de gebruikelijke vectorruimte-structuur, maar zijn natuurlijk oneindig-dimensionaal, i.h.b. wordt een functie als een punt opgevat; $D$ is nu "gewoon" een lineaire afbeelding. Het oplossen van (1.1) wordt het oplossen van een inhomogene lineaire vergelijking $D(f) = g$. De functionaalanalyse kan ook worden losgelaten op situaties waarin men geen expliciete oplossing heeft. Men kan zo bijvoorbeeld existentie van oplossingen bewijzen of eigenschappen van oplossingen afleiden. De meetkunde van de functieruimten kwam in het begin van de eeuw tot ontwikkeling, eerst aan de hand van concrete ruimten als $C([0,1])$. In Banach's proefschrift wordt lineaire analyse voor het eerst abstract opgezet. Zijn boek bevat de fundamentele stellingen over Banach-ruimten.

### Aanvullende literatuur


[1] S. Banach, *Théorie des operations linéaires*, 1932; heruitgave Chelsea.

[2] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, Springer, 1985.

[3] N. Dunford & J. T. Schwartz, *Linear operators*, 3 dl., Interscience, 1958.

[4] I. Gohberg, S. Goldberg & M. A. Kaashoek, *Basic classes of linear operators*, Birkhäuser, 2003;

[5] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Springer, 1982.

[6] M. Reed & B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, 4 dl, Academic Press.

[7] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw Hill, 1966.

[8] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw Hill, 1973.

[9] K. Saxe, *Beginning functional analysis*, Springer-Verlag, 2001.

[10] E. M. Stein & R. Shakarchi, *Fourier analysis, an introduction*, Princeton University Press, 2003.

[11] M. Schechter, *Principles of functional analysis*, American Mathematical Society, 2001, 2nd edition.

[12] G. F. Simmons, *Introduction to topology and modern analysis*, McGraw-Hill, 1963; reprinted by Robert E. Krieger Publishing Co., 1983.

[13] A. E. Taylor & D. C. Lay, *Introduction to functional analysis*, Wiley, 1980.

[14] K. Yoshida, *Functional analysis*, Springer, 1968.


# 2 Vectorruimten en metriek

In dit hoofdstuk worden Hilbert- en Banachruimten geïntroduceerd. We maken van de gelegenheid gebruik om kennis uit eerdere vakken die bij dit vak gebruikt zal worden, op te halen.

## 2.1 Norm en inproduct

**Definitie 2.1.** Een *metriek* op een verzameling $X$ is een afbeelding $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die voldoet aan

(i) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (symmetrie),

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (driehoeksongelijkheid).

Dan heet $(X, d)$ een *metrische ruimte.*

Een metriek op $X$ geeft aanleiding tot een topologische structuur op $X$. In het bijzonder zijn hierdoor de open en de gesloten deelverzamelingen van $X$ bepaald. Een basis voor de topologie van $X$ wordt gegeven door de *open ballen*

$$B(a, r) := \{x \in X : \ d(a, x) < r\} \qquad (a \in X, \ r > 0). \tag{2.1}$$

In het vervolg is $V$ een vectorruimte (lineaire ruimte) over een lichaam $\mathbb{K}$, waarbij $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ of $\mathbb{R}$.

**Definitie 2.2.** Een *norm* op $V$ is een afbeelding $\| \ \| : \ V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die voldoet aan

(i) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \quad (\alpha \in \mathbb{K})$,

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (driehoeksongelijkheid),

(iii) $\|x\| = 0 \implies x = 0$.

Dan heet $V$ een *genormeerde vecorruimte.*

Uit (i) volgt dat (iii) kan worden uitgebreid tot een equivalentie: $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

**Definitie 2.3.** Een *inproduct* (inwendig product) op $V$ is een afbeelding $\langle \ , \ \rangle \colon V \times V \to \mathbb{K}$ die voldoet aan

(i) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{K})$,

(ii) $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$ (symmetrie als $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; hermitische symmetrie als $\mathbb{K} = \mathbb{C}$),

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ (positief-semidefiniete eigenschap),

(iv) $\langle x, x\rangle = 0 \Longrightarrow x = 0$ (de positief-semidefiniete eigenschap is strikt).

Dan heet $V$ een *inproduct-ruimte.*

Uit (i) volgt dat (iv) kan worden uitgebreid tot een equivalentie: $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
Uit (i) en (ii) volgt dat

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle.$$

Daarom wordt in het geval $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ de afbeelding $\langle \ , \ \rangle \colon V \times V \to \mathbb{K}$ *sesquilineair* genoemd. Hier is *sesqui* het Latijnse woord voor anderhalf. Inderdaad, het inproduct is lineair in de eerste veranderlijke, maar slechts half lineair, nl. geconjugeerd lineair in de tweede veranderlijke. Als $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dan is de inproduct-afbeelding bilineair.

Een inproduct $\langle \ , \ \rangle$ induceert een norm door $\|x\|^2 := \langle x, x\rangle$ (zie Vrst 2.1). Een norm induceert een metriek door $d(x, y) := \|x - y\|$.

$\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}^n$ met het standaard-inproduct zijn inproduct-ruimten:

$$\langle z, w\rangle := \sum_{j=1}^{n} z_j \, \overline{w_j} \qquad (z, w \in \mathbb{K}^n).$$

Ruimten met inproduct lijken veel op $\mathbb{R}^n$ of $\mathbb{C}^n$. In een inproduct-ruimte over $\mathbb{R}$ heeft men een hoekbegrip: de cosinus van de hoek $\alpha$ (met $0 \leq \alpha \leq \pi$) tussen twee vectoren $x, y \neq 0$ is $\cos(\alpha) := \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}$ (vanwege Cauchy-Schwarz, zie (2.7), ligt het rechter lid in het interval

$[-1,1]$). Twee vectoren $x$ en $y$ in een inproduct-ruimte $V$ heten *onderling loodrecht* ($x \perp y$) indien $\langle x, y\rangle = 0$. Voor $x, y \neq 0$ is dit equivalent met het feit dat de onderlinge hoek tussen $x$ en $y$ gelijk is aan $\pi/2$. Verder zien we dat de nul-vector per definitie loodrecht staat op iedere vector. Voor $E \subset V$ bedoelen we met $x \perp E$ dat $x$ loodrecht staat op ieder element van $E$; $E_1 \perp E_2$ betekent dat $x \perp y$ voor alle $x \in E_1$ en $y \in E_2$.

**Opmerking 2.4.** Een vectorruimte over $\mathbb{C}$ wordt een vectorruimte over $\mathbb{R}$ door de scalairen te beperken van $\mathbb{C}$ tot $\mathbb{R}$. Zo wordt de complexe vectorruimte $\mathbb{C}^n$ met coördinaten

$$(z_1, \ldots, z_n) = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)$$

de reële vectorruimte $\mathbb{R}^{2n}$ met coördinaten $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$.

Als we een complexe inproduct-ruimte $V$ zo tot een reële vectorruimte $V_{\mathbb{R}}$ maken, dan wordt deze een reële inproduct-ruimte met inproduct

$$\langle z, w\rangle_{\mathbb{R}} := \operatorname{Re}\langle z, w\rangle \tag{2.2}$$

(zie Vrst 2.2). Met het standaard-inproduct op $\mathbb{C}^n$ krijgen we zo voor $z = (x_1+iy_1, \ldots, x_n+iy_n)$ en $w = (u_1 + iv_1, \ldots, u_n + iv_n)$ dat

$$\langle z, w\rangle_{\mathbb{R}} = x_1u_1 + y_1v_1 + \cdots + x_nu_n + y_nv_n.$$

**Opmerking* 2.5.** Als $V$ een complexe inproduct-ruimte is en $z, w \in V\backslash\{0\}$, dan kunnen we de *hoek* $\alpha \in [0, \pi]$ tussen $z$ en $w$ definiëren door

$$\cos\alpha := \frac{\operatorname{Re}\langle z, w\rangle}{\|z\|\,\|w\|}\,. \tag{2.3}$$

Deze definitie is niet in alle opzichten bevredigend. Bijvoorbeeld in $\mathbb{C}^n$ met standaard-inproduct en met standaardbasis $e_1, \ldots, e_n$ zouden zo $ie_1$ en $e_1$ onderlinge hoek $\pi/2$ hebben, terwijl hun complexe inproduct gelijk aan $i$ is, dus niet 0.

Een alternatieve definitie voor de *hoek* $\beta \in [0, \pi/2]$ tussen $z, w \in V\backslash\{0\}$ ($V$ complexe inproduct-ruimte) is:

$$\cos\beta := \frac{|\langle z, w\rangle|}{\|z\|\,\|w\|} = \max_{\theta_1,\theta_2\in[0,2\pi)} \frac{\operatorname{Re}\langle e^{i\theta_1}z, e^{i\theta_2}w\rangle}{\|e^{i\theta_1}z\|\,\|e^{i\theta_2}w\|}\,. \tag{2.4}$$

We kunnen de hoek $\beta$ in (2.4) ook zien als de minimale hoek $\alpha$ (in de zin van (2.3)) tussen twee vectoren ongelijk 0 in de complexe 1-dimensionale deelruimtes $\mathbb{C}z$ resp. $\mathbb{C}w$. Zo betekent het onderling loodrecht staan van $z, w \in V$ (d.w.z. $\langle z, w\rangle = 0$) dat elk tweetal vectoren ongelijk 0 genomen uit $\mathbb{C}z$ resp. $\mathbb{C}w$ onderlinge hoek $\pi/2$ heeft in de zin van (2.3).

**Stelling 2.6.** *Veronderstel dat $x, y$ vectoren in een ruimte met inproduct zijn en dat $x \perp y$. Dan geldt* **"Pythagoras"***:*

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2. \tag{2.5}$$

*Algemener, zonder de aanname $x \perp y$, geldt de* **parallellogram-identiteit**

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{2.6}$$

**Bewijs** (2.5) wordt bewezen door:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Zie Vrst 2.4 voor het bewijs van (2.6). $\square$

**Opmerking 2.7.**

1. Het bewijs van "Pythagoras" is geen bewijs van de stelling van Pythagoras uit de Euclidische meetkunde (zie Vrst 2.3).

2. In de parallelogram-identiteit komen alleen normen voor. Men kan bewijzen dat, als deze identiteit geldig is in een genormeerde ruimte, de norm van een inproduct afkomstig is (zie Vrst 2.5). De logisch equivalente omkering van deze uitspraak is soms handig:
*Als de parallelogram-identiteit niet geldt, dan komt de norm niet van een inproduct.*

3. Hierop sluit het begrip *polarisatie* aan: In een inproduct-ruimte hoeft men alleen de inproducten $\langle x, x\rangle$ te kennen:

$$\begin{aligned} 2\langle x, y\rangle &= \langle x+y, x+y\rangle - \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle \quad (\mathbb{K}=\mathbb{R}), \\ 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle &= \langle x+y, x+y\rangle - \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle \quad (\mathbb{K}=\mathbb{C}), \\ 2\mathrm{Im}\,\langle x, y\rangle &= \langle x+iy, x+iy\rangle - \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle \quad (\mathbb{K}=\mathbb{C}). \end{aligned}$$

**Stelling 2.8 (ongelijkheid van Cauchy-Schwarz).** *In een inproductruimte $V$ geldt*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|. \tag{2.7}$$

*In ongelijkheid* (2.7) *geldt gelijkheid desda $x \in \mathbb{K}y$ of $y \in \mathbb{K}x$.*

**Bewijs** Neem $x, y \in V$. Als $y = 0$ dan is aan (2.7) voldaan, neem dus al aan dat $y \neq 0$. Er geldt dat $\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \geq 0$ voor alle $\lambda \in \mathbb{K}$. We schrijven dit uit en substitueren $\lambda := -\langle x, y\rangle/\|y\|^2$ om het resultaat te krijgen (of equivalent: we substitueren $\lambda := t\langle x, y\rangle$ met $t \in \mathbb{R}$ en we kiezen de waarde van $t$ waarvoor dit tweede-graads polynoom in $t$ minimaal wordt). Zie verder Vrst 2.6. □

**Definitie 2.9.** Twee genormeerde vectorruimten $V$ en $W$ heten *equivalent* als er een bijectieve lineaire afbeelding $L\colon V \to W$ is en er positieve constanten $c$ en $C$ zijn zo dat

$$c\,\|v\|_V \leq \|Lv\|_W \leq C\,\|v\|_V \quad \text{voor alle } v \in V.$$

Twee normen $\|.\|$ en $\|.\|'$ op een vectorruimte $V$ heten *equivalent* als er positieve constanten $c$ en $C$ zijn zo dat

$$c\,\|v\| \leq \|v\|' \leq C\,\|v\| \quad \text{voor alle } v \in V.$$

Dus twee normen $\|.\|$ en $\|.\|'$ op $V$ zijn equivalent desda de genormeerde vectorruimten $(V, \|.\|)$ en $(V, \|.\|')$ equivalent zijn met gebruik van de bijectieve lineaire afbeelding $I\colon V \to V$.

**Voorbeeld 2.10.** Bekijk $\mathbb{R}^n$ met de standaardnorm ($l^2$-*norm*) $\|.\| = \|.\|_2$, de $l^1$-*norm* $\|.\|_1$ en de $l^\infty$-*norm* $\|.\|_\infty$:

$$\|x\| = \|x\|_2 := \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j|, \quad \|x\|_\infty := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

Deze drie normen zijn equivalent, zie Vrst 2.7.

## 2.2 Metrische ruimten

We gaven de definitie van een metrische ruimte $X$ in Definitie 2.1. Als $x \in X$ en $E \subset X$ dan wordt de afstand van $x$ tot $E$ gedefinieerd door

$$d(x, E) := \inf_{y \in E} d(x, y). \tag{2.8}$$

De afbeeldingen $x \mapsto d(x, y) \colon X \to \mathbb{R}$ ($y \in X$) en $x \mapsto d(x, E) \colon X \to \mathbb{R}$ zijn continu, zie Vrst 2.11.

**Definitie 2.11.** Een metrische ruimte heet *volledig* als iedere Cauchy-rij in $X$ een limiet heeft. Een volledige genormeerde vectorruimte heet een *Banach-ruimte*. Indien de norm afkomstig is van een inproduct spreekt men van een *Hilbert-ruimte*.

Bijv. $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}^n$ met het standaard-inproduct zijn Hilbert-ruimten.

Bij het vak Topologie is bewezen dat er voor iedere metrische ruimte $X$ een op isometrie na unieke volledige ruimte $\hat{X}$ bestaat zodanig dat $X$ dicht ligt in $\hat{X}$. Dit is de *completering* van $X$. Als $X$ een genormeerde lineaire ruimte is en de metriek van $X$ door de norm gedefinieerd wordt, dan krijgt $\hat{X}$ de structuur van een Banach-ruimte met $X$ als dichte lineaire deelruimte zo dat de beperking van de norm op $\hat{X}$ tot $X$ de norm op $X$ geeft.
Als $X$ bovendien een inproduct-ruimte is, dan krijgt $\hat{X}$ de structuur van een Hilbert-ruimte en de beperking van het inproduct op $\hat{X}$ tot $X$ geeft het inproduct op $X$.

**Opmerking* 2.12.** We brengen de constructie van $\hat{X}$ in herinnering. Definieer op de verzameling van alle Cauchy-rijen $(x_n)$ in $X$ een equivalentierelatie door $(x_n) \sim (y_n)$ desda $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Noteer de equivalentieklasse van $(x_n)$ met $\hat{x}$. Definieer $\hat{X}$ als de verzameling van equivalentieklassen $\hat{x}$ met metriek $d(\hat{x}, \hat{y}) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$. Dan is $\hat{X}$ met deze metriek volledig. De afbeelding van $X$ naar $\hat{X}$ die aan elke $x \in X$ de equivalentieklasse van de Cauchy-rij $x, x, x, \ldots$ toevoegt is een isometrische afbeelding van $X$ op een dichte deelverzameling van $\hat{X}$.

Als $X$ een genormeerde lineaire ruimte is, en daarmee ook een metrische ruimte, dan kunnen we de completering $\hat{X}$ van $X$ definiëren als hierboven. We geven aan $\hat{X}$ de structuur van een vectorruimte door $\hat{x} + \hat{y}$ te definiëren als de equivalentieklasse van $(x_n + y_n)$ en $\lambda\hat{x}$ als de equivalentieklasse van $(\lambda x_n)$. Definieer dan de norm op $\hat{X}$ door $\|\hat{x}\| := \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$. Als $X$ bovendien een inproductruimte is, dan definiëren we het inproduct op $\hat{X}$ door $\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle := \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle$,

Een gesloten deelverzameling van een volledige metrische ruimte is weer volledig. Daarom is een gesloten lineaire deelruimte van een Banach- of Hilbert-ruimte weer een Banach- c.q. Hilbert-ruimte. Eindig-dimensionale deelruimten van een Banach-ruimte zijn gesloten (zie Gevolg 2.19) maar in het algemeen hoeven lineaire deelruimten *niet* gesloten te zijn.

Een deelverzameling $A$ van een metrische ruimte $X$ heet *dicht* in $X$ als de afsluiting $\overline{A}$ van $A$ in $X$ gelijk is aan $X$. Bijv. is $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$. Een metrische ruimte $X$ heet *separabel* als $X$ een aftelbare dichte deelverzameling bezit. Bijv. is $\mathbb{R}^n$ separabel. In een metrische ruimte $X$ heet een deelverzameling $E$ *begrensd* als $E$ bevat is in een zekere open bal $B(a, r)$.

**Opmerking* 2.13.** Begrensdheid van een deelverzameling van een metrische ruimte is geen topologische invariant. Want aan een metrische ruimte $X$ kan altijd een nieuwe metriek gegeven worden zonder dat de topologie van $X$ verandert en zo dat $X$ zelf begrensd is, en dus ook al zijn deelverzamelingen. Voor genormeerde vectorruimten is dit geen probleem omdat de metriek door de norm wordt gegeven en daardoor vastligt. Algemener kunnen we echter metrische vectorruimten bekijken.

Daartoe kunnen we het beste beginnen met een *topologische vectorruimte*: dit is een vectorruimte $V$ die ook een topologische $T_1$-ruimte is ($T_1$ betekent dat elk punt een gesloten verzameling is) zo dat de afbeeldingen $(v,w) \mapsto v+w \colon V \times V \to V$ en $(\lambda, v) \mapsto \lambda v \colon \mathbb{K} \times V \to V$ continu zijn. Zie veel meer hierover in Rudin [8]. Een deelverzameling $E$ van een topologische vectorruimte $V$ heet *begrensd* als er bij elke omgeving $U$ van 0 in $V$ een $s > 0$ is zo dat $E \subset tU$ voor alle $t > s$.

Een *metrische vectorruimte* is een topologische vectorruimte voorzien van een metriek die compatibel is met de topologische structuur. Elke genormeerde vectorruimte is een metrische vectorruimte (zie Vrst 2.8). In een metrische vectorruimten wordt de definitie van begrensdheid van $E$ als deelverzameling van een topologische vectorruimte dan vertaald als volgt: voor iedere $r > 0$ is er een $N > 0$ zo dat $E \subset NB(0,r) := \{Nx : x \in B(0,r)\}$. In een genormeerde ruimte komt deze definitie van begrensdheid overeen met de gewone definitie van begrensde deelverzameling van een metrische ruimte, zie Vrst 2.9.

Zie Vrst 2.10 voor een voorbeeld van een metrische vectorruimte waarvan de metriek niet equivalent is met een metriek die van een norm afkomstig is.

**Definitie 2.14.** Een topologische ruimte $X$ heet *compact* als iedere open overdekking van $X$ een eindige deeloverdekking heeft. In het geval van een metrische ruimte $X$ is compactheid van $X$ equivalent met *rij-compactheid*: iedere rij in $X$ heeft een convergente deelrij.

Een deelverzameling $E$ van een topologische ruimte $X$ heet *compact* als $E$ in de door $X$ op $E$ geïnduceerde topologie compact is. Equivalent kunnen we zeggen dat een deelverzameling $E$ van een topologische ruimte $X$ compact is desda iedere open overdekking van $E$ in $X$ een eindige deeloverdekking heeft. In het geval van een metrische ruimte $X$ is $E$ compact desda $E$ rij-compact is desda iedere rij in $E$ een convergente deelrij heeft met limiet in $E$.

Compacte metrische ruimten (en dus ook compacte deelverzamelingen van metrische ruimten) zijn begrensd en separabel.

De volgende stelling is van groot belang voor ons vanwege vanwege een hele serie gevolgen.

**Stelling 2.15.** *Het beeld van een compacte verzameling onder een continue afbeelding is compact. Uitgebreider geformuleerd: Laten $X$ en $Y$ topologische ruimten zijn, $f \colon X \to Y$ continu, en $X$ compact. Dan is $f(X)$ een compacte deelverzameling van $Y$.*

**Gevolg 2.16.** *Een continue reëelwaardige functie op een compacte topologisch ruimte neemt een minimum en een maximum aan.*

**Gevolg 2.17.** *In een metrische ruimte $X$ worden afstanden tot compacte verzamelingen aangenomen, d.w.z. voor $E$ een compacte deelverzameling van $X$ en $x \in X$ is er een $u \in E$ zo dat*

$$d(x,E) := \inf_{y \in E} d(x,y) = d(x,u).$$

**Bewijs** Zie Vrst 2.12. □

**Gevolg 2.18.**

*(i) Iedere reële $n$-dimensionale genormeerde vectorruimte $V$ is via een lineaire afbeelding equivalent met $\mathbb{R}^n$ voorzien van de standaardnorm (zie Definitie 2.9).*

*(ii) Ieder tweetal normen $\|.\|$ en $\|.\|'$ op een eindig-dimensionale reële vectorruimte $V$ zijn equivalent (zie Definitie 2.9).*

**Bewijs** Kies voor het bewijs van (i) een basis $e_1, \ldots, e_n$ van $V$. Zij $\|.\|_V$ de norm op $V$ en $\|.\|$ de standaardnorm op $\mathbb{R}^n$. Zij $S^{n-1}$ de eenheidssfeer in $\mathbb{R}^n$. Deze is compact. De afbeelding $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \|x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\|_V \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is continu (ga na), dus zeker is deze afbeelding, beperkt tot de compacte verzameling $S^{n-1}$, continu en hij neemt dus op $S^{n-1}$ een minimum $c$ ($> 0$, ga na) en een maximum $C$ aan. Dus

$$c \le \frac{\|x_1e_1 + \cdots + x_ne_n\|_V}{\|x\|} \le C \quad \text{voor alle } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

Dus

$$c\|x\| \le \|x_1e_1 + \cdots + x_ne_n\|_V \le C\|x\| \quad \text{voor alle } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{2.9}$$

Dus $V$ met norm $\|.\|_V$ is via de bijectieve lineaire afbeelding $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \colon \mathbb{R}^n \to V$ equivalent met $\mathbb{R}^n$ met standaardnorm.

Om (ii) te bewijzen voor normen $\|.\|_V$ en $\|.\|'_V$ op $V$, gebruiken we het bewijs van (i) en verkrijgen we naast (2.9) ook

$$c'\|x\| \le \|x_1e_1 + \cdots + x_ne_n\|'_V \le C'\|x\| \quad \text{voor alle } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dus voor alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ geldt dat

$$C^{-1}c' \, \|x_1e_1 + \cdots + x_ne_n\|_V \le \|x_1e_1 + \cdots + x_ne_n\|'_V \le c^{-1}C' \, \|x_1e_1 + \cdots + x_ne_n\|_V,$$

waarmee de normen $\|.\|_V$ en $\|.\|'_V$ equivalent zijn. □

**Gevolg 2.19.** *Elke eindig-dimensionale lineaire deelruimte $W$ van een genormeerde vectorruimte $V$ is een gesloten deelverzameling van $V$.*

**Bewijs** Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat onze vectorruimten reëel zijn (waarom?). Kies een basis $e_1, \ldots, e_n$ van $W$. Dan definieert

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|' := \|x_1e_1 + \cdots + x_ne_n\|_V$$

een norm op $\mathbb{R}^n$, die volgens Gevolg 2.18 equivalent zal zijn met de standaardnorm op $\mathbb{R}^n$. Daarom zal elke Cauchy-rij van elementen $w = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in W$ overeenkomen met een Cauchy-rij van elementen $(x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$ t.o.v. de standaardnorm. Deze laatste Cauchy-rij convergeert binnen $\mathbb{R}^n$, dus de eerste Cauchy-rij convergeert binnen $W$. Dus elke rij in $W$ die binnen $V$ convergeert, is een Cauchy-rij in $W$ en convergeert daarom binnen $W$. Dus $W$ is gesloten in $V$. □

**Gevolg 2.20.** *Zij $W$ een eindig-dimensionale deelruimte van een genormeerde ruimte $V$ en $x$ een element van $V$. Dan is er een $u$ in $W$ zo dat $d(x, W) = d(x, u)$.*

**Bewijs** Zie Vrst 2.13. □

## 2.3 Banach- en Hilbert-ruimten: voorbeelden, onafhankelijkheid en bases

We geven eerst enige voorbeelden van Banach- en Hilbert-ruimten die wat verder reiken dan $\mathbb{R}^n$ of $\mathbb{C}^n$ met standaard-inproduct.

**Voorbeeld 2.21.** $C([a, b])$ is de ruimte van complexwaardige continue functies op $[a, b]$. Met de norm $\|f\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ (*sup-norm* of *uniforme norm*) wordt dit een complexe Banach-ruimte.
Evenzo is $C([a, b]; \mathbb{R})$, de ruimte van reëelwaardige continue functies op $[a, b]$, met de norm $\|.\|_\infty$ een reële Banach-ruimte.

**Voorbeeld 2.22.** De ruimte $l^p$ bestaat uit rijtjes $x = (x_1, x_2, \ldots)$ van complexe getallen met de eigenschap dat

$$\|x\|_p := \left( \sum_{j=1}^{\infty} |x|^p \right)^{1/p} < \infty. \tag{2.10}$$

Voor $p \geq 1$ is $\|.\|_p$ een norm op $l^p$ (de *$l^p$-norm*) en $l^p$ is een Banach-ruimte met deze norm. Voor algemene $p \geq 1$ zal dit later bewezen worden. Zie Vrst 2.14 voor de gevallen $p = 1$ en 2.
Voor $p = 2$ komt de norm af van het inproduct

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \, \overline{y_j}.$$

**Voorbeeld 2.23.** De ruimte $l^\infty$ bestaat uit alle rijtjes $x = (x_1, x_2, \ldots)$ van complexe getallen met de eigenschap dat

$$\|x\|_\infty := \sup_j \{|x|_j\} < \infty. \tag{2.11}$$

Op $l^\infty$ is $\|.\|_\infty$ een norm en $l^\infty$ is een Banach-ruimte t.o.v. deze norm. Zie Vrst 2.14.

**Voorbeeld 2.24.** De ruimte $c_0$ bestaat uit alle rijtjes $x = (x_1, x_2, \ldots)$ van complexe getallen die naar 0 convergeren (*nulrijtjes*). Dit is een gesloten lineaire deelruimte van $l^\infty$, dus ook weer een Banach-ruimte met de norm (2.11). Zie Vrst 2.14.

**Voorbeeld 2.25.** Zij $p$ reëel en $\geq 1$. Op $C([a, b])$ kan ook een norm worden gedefinieerd door

$$\|f\|_p := \left( \int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}. \tag{2.12}$$

Het zal later worden bewezen dat dit inderdaad een norm is. Echter, $C([a, b])$ is niet volledig t.o.v. deze norm. Maar de completering (notatie $L^p([a, b])$) van $C([a, b])$ t.o.v. de norm (2.12) is uiteraard wel een Banach-ruimte.

Zo gedefinieerd lijkt $L^p([a, b])$ tamelijk abstract. Bij het vak Integratietheorie leer je dat de elementen van $L^p([a, b])$ als concrete functies op $[a, b]$ gerealiseerd kunnen worden, waarbij er nog een zekere vrijheid is: Functies die slechts van elkaar in waarde verschillen op een verzameling van Lebesgue-maat 0, worden in deze Banach-ruimte met elkaar geïdentificeerd.

Voor $p = 2$ komt de norm (2.12) af van het inproduct

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \, \overline{g(x)} \, dx. \tag{2.13}$$

De inproduct-ruimte $C([a, b])$ met inproduct (2.13) is dus geen Hilbert-ruimte, maar zijn completering $L^2([a, b])$ is dat wel.

**Voorbeeld 2.26.** Laat weer $p \geq 1$. Nu gaan we functies op $\mathbb{R}$ bekijken met $L^p$-norm. Hiertoe werken we met de ruimte $C_c(\mathbb{R})$ van continue functies met compacte drager op $\mathbb{R}$, d.w.z. continue functies op $\mathbb{R}$ die buiten een zeker begrensd interval identiek 0 zijn.

Onder de *drager* van een contine functie op $\mathbb{R}$ verstaan we de afsluiting van de verzameling van alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $f(x) \neq 0$.

De ruimte $C_c(\mathbb{R})$ is lineair (ga na) en hij wordt een genormeerde lineaire ruimte t.o.v. de norm

$$\|f\|_p := \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}. \tag{2.14}$$

Merk op dat $\|f\|_p < \infty$ omdat $f$ compacte drager heeft; dit zou niet gelden voor een willekeurige continue functie op $\mathbb{R}$.
De ruimte $C_c(\mathbb{R})$ is niet volledig t.o.v. de norm (2.14). De completering (notatie $L^p(\mathbb{R})$) van $C_c([a, b])$ is een Banach-ruimte.
Voor $p = 2$ komt de norm (2.14) af van het inproduct

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \, \overline{g(x)} \, dx. \tag{2.15}$$

De inproduct-ruimte $C(\mathbb{R})$ met inproduct (2.15) is geen Hilbert-ruimte, maar zijn completering $L^2(\mathbb{R})$ is dat wel.

**Stelling 2.27 (Stelling van Weierstrass).** *Iedere (complexwaardige) continue functie gedefinieerd op een compact deel $K$ van $\mathbb{R}$ kan op $K$ uniform benaderd worden met (complexwaardige) polynomen.*

De stelling impliceert dat de polynomen dicht liggen in $C([a, b])$ t.o.v. de norm $\|.\|_\infty$. Het is nu eenvoudig in te zien dat de polynomen met coëfficiënten in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ dicht liggen in $C([a, b])$. Dit zijn er aftelbaar veel.

**Gevolg 2.28.** $C([a, b])$ *is separabel.*

Wat is de relatie tussen de verschillende normen hierboven? We geven een paar voorbeelden

**Voorbeeld 2.29.** Als $f \in C([a, b])$ dan is er een $C > 0$ onafhankelijk van $f$ met $\|f\|_2 \le C\|f\|$. Ook is er een $C > 0$ onafhankelijk van $f$ met $\|f\|_1 \le C\|f\|_2$.
Inderdaad,

$$\|f\|_2^2 = \int_a^b |f(t)|^2 dt \le (b - a)\|f\|^2$$

en

$$\|f\|_1^2 = \left( \int_a^b |f(t)| \cdot 1 \, dt \right)^2 \le \int_a^b |f(t)|^2 \, dt \int_a^b 1 \, dt = \|f\|_2^2 \, (b - a).$$

In de laatste formule is de ongelijkheid een typische toepassing van Cauchy-Schwarz.

Je zult bekend zijn met de definitie van een eindig lineair onafhankelijk stelsel in een vectorruimte $V$. Dit is een deelverzameling $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ van $V$ zo dat voor alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ geldt:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0 \implies \lambda_j = 0 \text{ voor alle } j.$$

**Definitie 2.30.** Een (mogelijk overaftelbare) niet-lege deelverzameling $E$ van een vectorruimte $V$ heet *lineair onafhankelijk* als iedere eindige niet-lege deelverzameling van $E$ een lineair onafhankelijk stelsel in $V$ is. We noemen $E$ dan een *lineair onafhankelijk stelsel.*

**Definitie 2.31.** Zij $E$ een niet-lege deelverzameling van een vectorruimte $V$. Het *lineaire opspansel* van $E$ (notatie $\mathrm{Span}(E)$) is de lineaire deelruimte van $V$ die bestaat uit alle eindige lineaire combinaties van elementen van $E$ (dus uit alle vectoren van de vorm $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ met $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $x_1, \ldots, x_n \in E$ en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

We noemen $E$ een *algebraïsche basis* van $V$ als $E$ een lineair onafhankelijk stelsel is en $\mathrm{Span}(E) = V$.

**Definitie 2.32.** In een inproduct-ruimte $V$ noemen we een deelverzameling $E$ een *orthogonaal* stelsel als de elementen van $E$ onderling loodrecht zijn en $0 \notin E$. Het stelsel heet *orthonormaal* als bovendien alle vectoren in het stelsel norm 1 hebben.

Zij vervolgens $H$ een inproduct-ruimte die bovendien volledig, dus een Hilbert-ruimte. Een *orthogonale basis* van $H$ is een orthogonaal stelsel $E$ in $H$ zo dat $\mathrm{Span}(E)$ dicht ligt in $H$. Als het stelsel $E$ bovendien orthonormaal is, dan spreken we van een *orthonormale basis*.

Een orthogonaal stelsel in een inproduct-ruimte is altijd lineair onafhankelijk (zie Vrst 2.16). In het volgende hoofdstuk zullen we zien dat een oneindige orthogonale basis van een Hilbert-ruimte $H$ nooit een algebraïsche basis van $H$ kan zijn.

In de Hilbert-ruimte $l^2$ vormen de vectoren $e_n$ (op plaats $n$ een 1, verder overal 0) een orthonormale basis, zie Vrst 2.17.

We laten tenslotte zien dat iedere vectorruimte een algebraïsche basis heeft. Dit gaat met behulp van het Lemma van Zorn, dat equivalent is met het Keuze-axioma.

**Stelling 2.33 (Lemma van Zorn).** *Veronderstel dat $X$ een partieel geordende verzameling is zo dat iedere keten een bovengrens in $X$ heeft. Dan heeft $X$ een maximaal element.*

Hier volgt een toelichting op de begrippen die in de formulering van dit lemma gebruikt worden. Een *partiële ordening* $\leq$ op $X$ is een relatie op $X$ die voldoet aan (i) $x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$, (ii) $x \leq x$ voor iedere $x \in X$ en (iii) $x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$. De ordening heet *lineair* als verder (iv) $\forall x \neq y \in X : x \leq y$ of $y \leq x$ (exclusief!). Een keten $K$ in $X$ is een deelverzameling van $X$ die door $\leq$ lineair wordt geordend. Een bovengrens voor $K$ is een $x \in X$ zodat voor alle $y \in K$ geldt $y \leq x$. Een element $x \in X$ heet maximaal als voor iedere $y \in X$ geldt $x \leq y \implies y = x$: "Er is geen groter element dan $x$".

**Stelling 2.34.** *Iedere vectorruimte $V$ heeft een algebraïsche basis.*

**Bewijs** Zij $\mathcal{F}$ de collectie lineair onafhankelijke stelsels in $V$. Orden deze door inclusie, d.w.z. $M_1 \leq M_2 \iff M_1 \subset M_2$. Dit geeft een partiële ordening. Een keten $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ heeft een bovengrens $M = \cup_{\alpha \in A} M_\alpha$. Deze $M$ is een lineair onafhankelijk stelsel dat alle $M_\alpha$ bevat: een afhankelijkheid tussen eindig veel elementen van $M$ zou al bestaan in zekere $M_\alpha$. Er is dus een maximaal element, zeg $E$ en dit is een basis: $E$ is immers lineair onafhankelijk en als $x$ niet op $E$ zou zijn uit te schrijven is $E \cup \{x\}$ een groter lineair onafhankelijk stelsel. $\square$

In het volgende hoofdtsuk zullen we op een soortgelijke manier bewijzen dat elke Hilbert-ruimte een orthonormale basis heeft.

## Opgaven

**Vrst 2.1.** Bewijs dat als $V$ een ruimte met inproduct $\langle\ ,\ \rangle$ is, dan is $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ een norm. *Opmerking* Het bewijs van de driehoeksongelijkheid voor de zo gedefinieerde $\|x\|$ gebruikt de ongelijkheid (2.7) van Cauchy-Schwarz. Er is echter geen sprake van een cirkelredenering, want het bewijs van Cauchy-Schwarz gebruikt niet de driehoeksongelijkheid voor $\|x\|$,

**Vrst 2.2.** Zij $V$ een complexe inproductruimte en zij $V_{\mathbb{R}}$ de vectorruimte $V$ met de scalairen beperkt tot $\mathbb{R}$. Bewijs dat (2.2) aan de regels van een inproduct op $V_{\mathbb{R}}$ voldoet.

**Vrst 2.3.** Beredeneer dat het bewijs van "Pythagoras" in Stelling 2.6 geen bewijs is van de stelling van Pythagoras uit de Euclidische meetkunde.

**Vrst 2.4.** Bewijs de parallellogram-identiteit (2.6).

**Vrst* 2.5.** In de parallellogram-identiteit (2.6) komen alleen normen voor. Bewijs dat, als deze identiteit geldig is in een genormeerde ruimte, de norm van een inproduct afkomstig is.
*Aanwijzing* Definieer een inproduct met behulp van polarisatie, zie Opmerking 2.7.3.

**Vrst 2.6.** Geef de details van het bewijs van het eerste deel van Stelling 2.8 en bewijs het tweede deel van deze stelling (i.e. wanneer gelijkheid geldt in de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz).

**Vrst 2.7.** Bewijs dat de drie normen op $\mathbb{R}^n$ in Voorbeeld 2.10 equivalent zijn.

**Vrst 2.8.** Bewijs dat in een genormeerde vectorruimte $V$ de afbeeldingen $(v, w) \mapsto v + w \colon V \times V \to V$ en $(\lambda, v) \mapsto \lambda v \colon \mathbb{K} \times V \to V$ continu zijn.

**Vrst 2.9.** Bewijs dat een deelverzameling $E$ van een genormeerde vectorruimte $V$ begrensd id desda er voor iedere $r > 0$ een $N > 0$ is zo dat $E \subset NB(0, r) := \{Nx : \ x \in B(0, r)\}$.

**Vrst* 2.10.** Laat $V = C^\infty(T)$ waarbij $T$ de eenheidscirkel is.

a) Ga na dat men op $V$ een metriek kan definiëren als volgt:

$$d(f, g) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i(f, g), \quad \text{waarbij} \quad d_i(f, g) := \min\left\{1, \sup_{x \in T} |f^{(i)}(x) - g^{(i)}(x)|\right\}.$$

b) Laat zien dat $V$ een metrische vectorruimte is zoals gedefinieerd in Opmerking 2.13.

c) Laat zien dat $V$ volledig is in deze metriek.

d) Laat zien dat $V$ begrensd is in deze metriek, maar dat er niet voor iedere $r > 0$ een $N > 0$ is zo dat $V \subset NB(0, r)$.

**Vrst 2.11.** Zij $E$ een deelverzameling van een metrische ruimte $X$. Bewijs dat de afbeelding $x \mapsto d(x, E) \colon X \to \mathbb{R}$ continu is. Concludeer dat de afbeelding $x \mapsto d(x, y) \colon X \to \mathbb{R}$ $(y \in X)$ continu is.

**Vrst 2.12.** Bewijs Gevolg 2.17.

**Vrst 2.13.** Bewijs Gevolg 2.20.
*Aanwijzing* De driehoeksongelijkheid geeft dat $d(x, W) = d(x, W \cap B(0, 2\|x\|))$. Omdat $W \cap B(0, 2\|x\|)$ compact is kunnen we Gevolg 2.17 toepassen.

**Vrst 2.14.** Bewijs dat $l^1$, $l^2$, $l^\infty$ genormeerde lineaire ruimten zijn met de normen $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, $\|.\|_\infty$, resp. (zie (2.10) en (2.11)).
Bewijs dat deze ruimten Banach-ruimten zijn met deze normen.
Bewijs ook dat $c_0$ een gesloten lineaire deelruimte is van $l^\infty$ (zie Voorbeeld 2.24).

**Vrst 2.15.** Laat zien dat er geen inproduct bestaat op $C([0,1])$ dat de sup-norm induceert. Idem voor $C([0,1])$ en de $L^1$-norm.

**Vrst 2.16.** Bewijs dat een orthogonaal stelsel in een inproduct-ruimte altijd lineair onafhankelijk is.

**Vrst 2.17.** Bewijs dat de vectoren $e_n$ ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$) een orthonormale basis van de Hilbert-ruimte $l^2$ vormen. Hier is $e_n$ de vector $(0,\ldots,0,1,0,\ldots)$ in $l^2$ (alleen op plaats $n$ een 1).

**Vrst 2.18.** Welke van de hieronder beschreven functies definieert een inproduct op de ruimte van reëelwaardige, 2 keer continu differentieerbare functies $C^2([0,1])$?

a) $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$

b) $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt + f(0)g(0)$

c) $\langle f,g\rangle = \int_0^1 (f'(t)g(t) + g'(t)f(t))\,dt$

d) $\langle f,g\rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t) + f''(t)g''(t))\,dt.$

12 Welke van deze inproducten maakt van $C^2([0,1])$ een Hilbert-ruimte?

**Vrst 2.19.** Welke van de hieronder beschreven functies definieert een norm op $C^2([0,1])$?

a) $\|f\| = \max_t\{|f(t) + f'(t)|\}$

b) $\|f\| = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt$

c) $\|f\| = |f(0)| + \int_0^1 |f''(t)|\,dt$

d) $\|f\| = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^j}|f(k/j)|$

e) $\|f\| = \max_t\{|f(t)| + |f''(t)|\}.$

Welke van deze normen maakt van $C^2([0,1])$ een Banach-ruimte?

**Vrst 2.20.** Bewijs dat $l^\infty$ niet separabel is. Hoe zit het met $c_0$?

# 3 Hilbert-ruimten

## 3.1 Voorbereiding

Een elementaire, maar veel gebruikte eigenschap van het inproduct op een inproduct-ruimte is dat $\langle x, y \rangle$ continu afhangt van $x$ en $y$, zie Vrst 3.1.

Hier volgen een paar uitspraken over convergentie van reeksen die mogelijk al bij eerdere analyse-vakken behandeld zijn (zie bijv. §3.52–3.55 in W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, Third ed., 1976 of §2.4 en §2.5 in A. Browder, *Mathematical analysis, an introduction*, Springer, 1996). Bekijk de reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \tag{3.1}$$

met termen $c_k \in \mathbb{C}$. Zoals bekend, zeggen we dat de reeks (3.1) *convergeert met som $s$* als

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} c_k \quad \text{bestaat en gelijk is aan } s,$$

en we zeggen dat de reeks (3.1) *absoluut convergeert* als de reeks $\sum_{k=1}^{n} |c_k|$ convergeert. Absolute convergentie impliceert gewone convergentie, maar niet andersom.

**Definitie 3.1.** De reeks (3.1) *convergeert onvoorwaardelijk met som $s$* als hij voor elke herordening van de termen convergeert met dezelfde som $s$.

**Stelling 3.2.** *Voor de reeks* (3.1) *zijn de volgende eigenschappen equivalent:*

*(i) De reeks convergeert absoluut.*

*(ii) De reeks convergeert onvoorwaardelijk met som $s$.*

**Gevolg 3.3.** *Veronderstel dat in de reeks* (3.1) $c_n \geq 0$ *voor alle $n$. Dan geldt een van de twee volgende, elkaar uitsluitende alternatieven:*

1. *In elke volgorde van termen convergeert de reeks met (eindige) som $s$.*
2. *In elke volgorde van termen divergeert de reeks met som $\infty$.*

In bovenstaand Gevolg is 1. equivalent met:

1′. In een zekere volgorde van termen convergeert de reeks.

Ook is 2. equivalent met:

2′. In een zekere volgorde van termen divergeert de reeks.

Zij nu $\mathcal{A}$ een willekeurige (mogelijk overaftelbare) indexverzameling en zij voor elke $\alpha \in \mathcal{A}$ een complex getal $c_\alpha$ gegeven. We bekijken nu de formele reeks

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} c_\alpha. \tag{3.2}$$

**Definitie 3.4.** De reeks (3.2) *convergeert met som $s$* als er bij iedere $\varepsilon > 0$ een eindige deelverzameling $\mathcal{A}_0$ van $\mathcal{A}$ is zo dat voor iedere eindige verzameling $\mathcal{B}$ met $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ geldt dat $\left| s - \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} c_\alpha \right| < \varepsilon$.

**Stelling 3.5.** *Als de reeks* (3.2) *convergeert met som* $s$ *dan is* $c_\alpha \neq 0$ *voor hoogstens aftelbaar veel waarden van* $\alpha$.
*De equivalente uitspraken voor de reeks* (3.1) *in Stelling 3.2 zijn ook equivalent met de uitspraak dat de reeks* $\sum_{n\in\mathbb{Z}_{>0}} c_n$ *naar* $s$ *convergeert volgens Definitie 3.4.*

**Gevolg 3.6.** *Zij* $\mathcal{A}$ *een aftelbaar oneindige index-verzameling. Dan zijn voor de reeks* (3.2) *equivalent:*

(i) *De reeks convergeert met som* $s$ *volgens Definitie 3.4.*

(ii) *Voor elke aftelling* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *van* $\mathcal{A}$ *convergeert de reeks* $\sum_{n=1}^{\infty} c_{\alpha_n}$ *onvoorwaardelijk met som* $s$.

(iii) *Voor een zekere aftelling* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *van* $\mathcal{A}$ *convergeert de reeks* $\sum_{n=1}^{\infty} c_{\alpha_n}$ *absoluut.*

(iv) *Voor elke aftelling* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *van* $\mathcal{A}$ *convergeert de reeks* $\sum_{n=1}^{\infty} c_{\alpha_n}$ *absoluut.*

**Definitie 3.7.** Zij $V$ een genormeerde vectorruimte. Laten $x_1, x_2, \ldots$ en $x$ elementen van $V$ zijn. Dan betekent $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dat

$$\lim_{N\to\infty} \left( \sum_{n=1}^{N} x_n \right) = x \text{ in de normtopologie, m.a.w.} \quad \lim_{N\to\infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_n \right\| = 0.$$

We zeggen dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *absoluut convergeert* als $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.
Als de som $x$ van voor elke volgorde van de termen in de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ bestaat en dezelfde is, dan spreken we van *onvoorwaardelijke convergentie met som* $x$. Als de convergentie met som $x$ geldt in bovenstaande volgorde van termen maar niet in elke andere volgorde, dan spreken we van *voorwaardelijke convergentie.*

In een Banach-ruimte $V$ zal absolute convergentie van een reeks $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ impliceren dat deze reeks in $V$ convergeert met een zekere som $x$, en dat deze convergentie onvoorwaardelijk is. Omgekeerd hoeft onvoorwaardelijke convergentie geen absolute convergentie te impliceren als $V$ oneindig-dimensionaal is.

## 3.2 Overzicht van de belangrijkste resultaten

Verder in dit hoofdstuk zal $H$ steeds een Hilbert-ruimte zijn.

We sommen hier de belangrijkste definities en stellingen op betreffende orthogonale projecties, orthogonale stelsels en orthogonale bases in $H$. Dit alles nog zonder bewijzen.

Zoals bekend heet een deelverzameling $E$ van een vectorruimte *convex* als $x, y \in E$ impliceert dat $tx + (1-t)y \in E$ voor iedere $0 \leq t \leq 1$.

**Stelling 3.8.** *Zij* $X$ *een gesloten convexe deelverzameling van* $H$ *en* $y \in H$. *Dan is er een unieke* $x \in X$ *zo dat* $d(y, X) = d(y, x)$. *M.a.w., de afstand van een punt in* $H$ *tot een gesloten convexe deelverzameling van* $H$ *wordt uniek aangenomen.*

**Lemma 3.9.** *Zij* $X$ *een gesloten lineaire deelruimte van* $H$ *en* $y \in H$. *Dan geldt voor elke* $x \in X$ *dat*

$$d(y, X) = d(y, x) \iff y - x \perp X.$$

**Gevolg 3.10.** *Zij* $X$ *een gesloten lineaire deelruimte van* $H$ *en* $y \in H$. *Dan is er een unieke* $x \in X$ *zo dat* $d(y, X) = d(y, x)$ *en er is een unieke* $x \in X$ *(dezelfde) zo dat* $y - x \perp X$.

**Definitie 3.11.** Het *orthoplement* van een deelverzameling $E$ van $H$ is de verzameling

$$E^{\perp} := \{z \in H : \langle z, x \rangle = 0 \text{ voor alle } x \in E\}.$$

**Propositie 3.12.** *Zij $E$ een deelverzameling van $H$. Dan geldt:*

1. *$E^{\perp}$ is een gesloten lineaire deelruimte van $H$.*
2. *$E \cap E^{\perp} \subset \{0\}$.*
3. *$(E^{\perp})^{\perp}$ is een gesloten lineaire deelruimte van $H$ en $E \subset (E^{\perp})^{\perp}$.*
4. *$E = (E^{\perp})^{\perp} \iff E$ is een gesloten lineaire deelruimte van $H$.*

**Definitie 3.13.** Zij $X$ een gesloten lineaire deelruimte van $H$. De *orthogonale projectie* van $H$ op $X$ is de afbeelding $P_X \colon H \to H$ zo dat, voor elke $y \in H$, $P_X(y) = x$ met $x$ het unieke element van $X$ zo dat $y - x \perp X$.

**Propositie 3.14.** *De afbeelding $P_X$, zoals net gedefinieerd, heeft de volgende eigenschappen:*

1. *$P_X \colon H \to H$ is lineair;*
2. *$P_X(H) = X$;*
3. *$P_X$ beperkt tot $X$ is de identiteits-afbeelding op $X$ en $P_X$ beperkt tot $X^{\perp}$ is de nul-afbeelding op $X^{\perp}$;*
4. *$P_X \circ P_X = P_X$ ($P_X$ is een* **idempotente** *afbeelding);*
5. *$I = P_X + P_{X^{\perp}}$, d.w.z. dat $y = P_X(y) + P_{X^{\perp}}(y)$ voor alle $y \in H$;*
6. *$P_X P_{X^{\perp}} = 0 = P_{X^{\perp}} P_X$.*

**Gevolg 3.15.** *De afbeelding $P_X$, zoals net gedefinieerd, heeft de verdere eigenschappen*

1. *Voor alle $y \in H$ geldt dat $\|y\|^2 = \|P_X(y)\|^2 + \|P_{X^{\perp}}(y)\|^2$.*
2. *Voor alle $y \in H$ geldt dat $\|P_X(y)\| \leq \|y\|$;*
3. *Voor alle $y \in H$ en $x \in X$ geldt dat $\langle P_X(y), x \rangle = \langle y, x \rangle$.*

**Definitie 3.16.** We zeggen dat een Hilbert-ruimte $H$ de *orthogonale directe som* is van gesloten lineaire deelruimten $X$ en $Y$ (notatie $H = X \oplus Y$) als

(i) $X \perp Y$;

(ii) Voor alle $z \in H$ is er een unieke $x \in X$ en een unieke $y \in Y$ zo dat $z = x + y$.

Merk op dat voor een vectorruimte $H$ met lineaire deelruimten $X$ en $Y$ eigenschap (ii) in bovenstaande definitie equivalent is met:
(ii)$'$ $X \cap Y = \{0\}$ en $X + Y = H$.
Hier is $X + Y := \{x + y : \ x \in X, \ y \in Y\}$.

**Voorbeeld 3.17.** Als $H$ een Hilbert-ruimte is en $X$ een gesloten lineaire deelruimte, dan $H = X \oplus X^{\perp}$. Immers, $z = P_x z + (z - P_X z)$ geeft de unieke decompositie van $z \in H$ volgens Definitie 3.16(ii). Merk ook op dat:

$$\begin{aligned} X = H &\iff X^{\perp} = \{0\}, \\ X = \{0\} &\iff X^{\perp} = H, \\ \{0\} \neq X \neq H &\iff \{0\} \neq X^{\perp} \neq H. \end{aligned}$$

**Stelling 3.18.** *Zij $\mathcal{A}$ een (mogelijk overaftelbare) index-verzameling. Zij $E := \{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ een orthonormaal stelsel in de Hilbert-ruimte $H$. Zij $X := \overline{\mathrm{Span}(E)}$ (de afsluiting van het lineaire opspansel van vectoren uit het orthonormale stelsel). Dan geldt:*

1. *Voor elke $x \in H$ is $\langle x, e_\alpha\rangle \neq 0$ voor slechts aftelbaar veel $\alpha \in \mathcal{A}$.*
   *Schrijf $\mathcal{A}_x := \{\alpha \in \mathcal{A} : \langle x, e_\alpha\rangle \neq 0\}$.*

2. *Schrijf*
$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha := \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_x} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha.$$
   *Dan convergeert deze laatste som onvoorwaardelijk naar $P_X(x)$, wat we kortweg schrijven als:*
$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha = P_X(x). \tag{3.3}$$

3. *Schrijf*
$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 := \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_x} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2.$$
   *Dan geldt*
$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 = \|P_X(x)\|^2, \tag{3.4}$$
   *dus ook de* **ongelijkheid van Bessel***:*
$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \tag{3.5}$$
   *en*
$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 < \infty.$$

4. *Voor $x \in H$ hebben we de volgende equivalenties:*
$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha = x \iff \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 = \|x\|^2 \iff x \in X.$$

**Gevolg 3.19.** *Zij $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ een orthonormaal stelsel in $H$. Dan zijn equivalent:*

*(i) $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ is een orthonormale basis van $H$;*

*(ii) Het orthonormale stelsel $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ is* **maximaal***, d.w.z. dat het niet kan worden uitgebreid tot een groter orthonormaal stelsel.*

*(iii)* $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}\langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha = x$ *voor elke* $x \in H$;

*(iv)* $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}|\langle x, e_\alpha\rangle|^2 = \|x\|^2$ *voor elke* $x \in H$.

*In het geval van een orthonormale basis geldt bovendien:*

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}\langle x, e_\alpha\rangle\,\overline{\langle y, e_\alpha\rangle} = \langle x, y\rangle \quad \textit{voor alle } x, y \in H. \tag{3.6}$$

*Hier wordt de mogelijk overaftelbare som weer aftelbaar gemaakt door alleen te sommeren over de termen ongelijk 0, dus over* $\mathcal{A}_x \cap \mathcal{A}_y$.

**Opmerking 3.20.** Zij $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ een orthonormaal stelsel in $H$. Als voor een $x \in H$ en voor zekere $\{c_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ met $c_\alpha \in \mathbb{K}$ en met $c_\alpha \neq 0$ voor hoogstens aftelbaar veel $\alpha$ geldt dat

$$x = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} c_\alpha e_\alpha \quad \text{(sommatie alleen over termen} \neq 0\text{; onvoorwaardelijke convergentie)}, \tag{3.7}$$

dan $c_\alpha = \langle x, e_\alpha\rangle$ (ga na). In het bijzonder zal in het geval van een orthonormale basis iedere $x \in H$ uniek te schrijven zijn in de vorm (3.7).

**Stelling 3.21.** *Ieder orthonormaal stelsel in een Hilbert-ruimte kan uitgebreid worden tot een orthonormale basis. In het bijzonder heeft iedere Hilbert-ruimte een orthonormale basis.*

**Stelling 3.22.** *Voor een Hilbert-ruimte* $H$ *zijn equivalent:*

*(i)* $H$ *is separabel.*

*(ii) Iedere orthonormale basis van* $H$ *is aftelbaar.*

*(iii) Minstens één orthonormale basis van* $H$ *is aftelbaar.*

**Definitie 3.23.** Een *isometrie* tussen twee Hilbert-ruimten $H_1$ en $H_2$ is een bijectieve lineaire afbeelding $F\colon H_1 \to H_2$ die het inproduct behoudt, i.e. $\langle Fx, Fy\rangle = \langle x, y\rangle$ voor alle $x, y \in H_1$, We zeggen dat dat $H_1$ *isometrisch isomorf* is met $H_2$.

Onder minder aannamen dan in de definitie kunnen we al tot een isometrie besluiten, zie Vrst 3.6.

**Stelling 3.24.** *Een separabele Hilbert-ruimte* $H$ *is òf eindig-dimensionaal en (dus) voor zekere* $n$ *isometrisch isomorf met* $\mathbb{K}^n$*, òf oneindig-dimensionaal en isometrisch isomorf met* $l^2$.

**Opmerking 3.25.** Als $E := \{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ een orthogonaal stelsel is in een inproduct-ruimte dan is $F := \{\|e_\alpha\|^{-1} e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ een orthonormaal stelsel. Als $E$ een orthogonale basis is van een Hilbert-ruimte, dan is $F$ een orthonormale basis.

**Voorbeeld 3.26.** Voorbeelden van orthogonale stelsels.

1. Voor iedere $t \in [0, 2\pi)$ vormen de twee vectoren $(\cos t, \sin t)$, $(-\sin t, \cos t)$ een orthonormale basis van $\mathbb{R}^2$;

2. De polynomen $1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x$ vormen een orthogonaal stelsel in $C([-1, 1])$ t.o.v. het inproduct (2.13) met $a = -1$, $b = 1$.

3. Zij $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ de ruimte van $2\pi$-periodieke continue complexwaardige functies op $\mathbb{R}$. De functies $x \mapsto e^{inx}$ $(n \in \mathbb{Z})$ vormen een orthonormaal stelsel in $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ t.o.v. het inproduct
$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx. \tag{3.8}$$
We zullen later zien dat deze functies een orthonormale basis vormen van de completering $L^2([-\pi,\pi],(2\pi)^{-1}dx)$ van $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ met dit inproduct.

4. De functies $x \mapsto \cos(nx)$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ vormen een orthogonaal stelsel in $C([0,\pi])$ t.o.v. het inproduct (2.13) met $a = 0$, $b = \pi$. We zullen later zien dat deze functies een orthogonale basis vormen van de completering $L^2([0,\pi])$ van $C([0,\pi])$ met dit inproduct.

## 3.3 Bewijzen van de stellingen

**Bewijs van Stelling 3.8** Eerst bewijzen we de existentie. Neem een rij $(x_n)$ in $X$ met $d(y,x_n) \to d(y,X)$ als $n \to \infty$. We laten zien dat de rij $(x_n)$ een Cauchy-rij is. De parallellogram-identiteit (2.6) geeft
$$\|(x_n - y) + (x_m - y)\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 = 2(\|x_n - y\|^2 + \|x_m - y\|^2),$$
dus
$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\left(\|x_n - y\|^2 + \|x_m - y\|^2\right) - 4\,\|\tfrac{1}{2}(x_n + x_m) - y\|^2.$$
Omdat $X$ convex is, is $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in X$, dus $\|\frac{1}{2}(x_n + x_m) - y\| \geq d(y,X)$. Dus
$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2\left(\|x_n - y\|^2 - d(y,X)^2\right) + 2\left(\|x_m - y\|^2 - d(y,X)^2\right). \tag{3.9}$$
Dus $\lim_{n,m\to\infty}\|x_n - x_m\|^2 = 0$, waarmee is aangetoond dat $(x_n)$ een Cauchy-rij is. Omdat $X$ als gesloten deelverzameling van een volledige metrische ruimte zelf volledig is, zal de rij $(x_n)$ dus een limiet $x$ in $X$ hebben en $d(y,x_n) \to d(y,x)$ als $n \to \infty$. Dus $d(y,x) = d(y,X)$.

Om uniciteit te bewijzen veronderstellen we dat $x.x' \in X$ zo dat $d(y,x) = d(y,X) = d(y,x')$. Met dezelfde redenering als zonet voor $x, x'$ i.p.v. $x_n, x_m$ geeft (3.9) dan dat
$$\|x - x'\|^2 \leq 2\left(\|x - y\|^2 - d(y,X)^2\right) + 2\left(\|x' - y\|^2 - d(y,X)^2\right) = 0,$$
dus $x = x'$. $\square$

**Opmerking 3.27.** Het bewijs van Stelling 3.8 blijft geldig als slechts wordt aangenomen dat $H$ een inproduct-ruimte is en dat $X$ een volledige en convexe deelverzameling is. Uniciteit van het punt $x$ volgt reeds zonder aanname van volledigheid van $X$.

**Bewijs van Lemma 3.9** Eerst bewijzen we dat $d(y,X) = d(y,x) \implies y - x \perp X$. Stel dat $d(y,X) = d(y,x)$. Neem $0 \neq z \in X$ willekeurig. Dan geldt voor iedere $\lambda \in \mathbb{K}$ dat
$$\|y - x\|^2 \leq \|y - x + \lambda z\|^2 = \|y - x\|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\lambda\langle z, y - x\rangle\right) + |\lambda|^2\|z\|^2,$$
dus
$$2\mathrm{Re}\left(\lambda\langle z, y - x\rangle\right) + |\lambda|^2\|z\|^2 \geq 0.$$
Voor $\lambda := -\langle y - x, z\rangle/\|z\|^2$ geeft dit $-|\langle z, y - x\rangle|^2/\|z\|^2 \geq 0$, dus $\langle z, y - x\rangle = 0$.

Omgekeerd, als $y - x \perp X$ voor zekere $x \in X$, dan is voor iedere $z \in X$ $y - x \perp x - z$ en geeft Pythagoras

$$\|y - z\|^2 = \|y - x + x - z\|^2 = \|y - x\|^2 + \|x - z\|^2 \geq \|y - x\|^2,$$

dus $d(y, X) = d(y, x)$. $\square$

**Opmerking 3.28.** Uit het bewijs blijkt dat we slechts gebruikt hebben dat $X$ een lineaire deelruimte is van een inproduct-ruimte $H$. Dan geldt reeds de equivalentie van de twee eigenschappen in Lemma 3.9.

Zie Vrst 3.2 voor het bewijs van Propositie 3.12.

**Bewijs van Propositie 3.14** De onderdelen 2–6 volgen uit Definitie 3.13. We geven het bewijs van onderdeel 1 (lineariteit). Voor willekeurige $x, y \in H$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ geldt:

$$P_X(\lambda x + \mu y) - \lambda P_X x - \mu P_X y = (P_X(\lambda x + \mu y) - (\lambda x + \mu y)) - \lambda(P_X x - x) - \mu(P_X y - y).$$

Het linkerlid zit in $X$ en het rechterlid zit in $X^\perp$. Dus het linkerlid zit in $X \cap X^\perp$, dus moet gelijk zijn aan 0. $\square$

Zie Vrst 3.3 voor het bewijs van Gevolg 3.15.

**Bewijs van Stelling 3.18** We bewijzen eerst (3.3), (3.4) en (3.5) onder de aanname dat de indexverzameling $\mathcal{A}$ eindig is. Dan $X = \operatorname{Span}\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Voor het bewijs van (3.3) merken we op dat het linkerlid van (3.3) in $X$ zit en dat voor alle $\beta \in \mathcal{A}$

$$\langle x - \textstyle\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha, e_\beta \rangle = \langle x, e_\beta \rangle - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle x, e_\alpha \rangle \langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \langle x, e_\beta \rangle - \langle x, e_\beta \rangle = 0,$$

dus dat $x - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha \perp X$. Dan volgt (3.3) uit Definitie 3.13.

Nu het bewijs van (3.4) en (3.5) met $\mathcal{A}$ eindig. Er volgt uit Gevolg 3.15.2 en (3.3) dat

$$\|x\|^2 \geq \|P_X x\|^2 = \|\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{A}} \langle x, e_\alpha \rangle \, \overline{\langle x, e_\beta \rangle} \, \langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \sum_{\alpha, \in \mathcal{A}} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2.$$

Nu bewijzen we onderdeel 1 van de Stelling. We mogen wel aannemen dat $\|x\| = 1$. Voor $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ geldt

$$\sharp\{\alpha \in \mathcal{A} : |\langle x, e_\alpha \rangle| \geq 1/n\} \leq n^2.$$

Immers, een eindig deelstelsel $\{e_j\}_{j=1}^{n^2+1}$ zo dat $|\langle x, e_j \rangle| \geq 1/n$ voor alle $j$, leidt tot

$$1 = \|x\|^2 \geq \sum_{j=1}^{n^2+1} |\langle x, e_j \rangle|^2 \geq \frac{n^2 + 1}{n^2} > 1,$$

een tegenspraak. Nu is

$$\{\alpha \in \mathcal{A} : \langle x, e_\alpha \rangle \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} \{\alpha \in \mathcal{A} : |\langle x, e_\alpha \rangle| \geq 1/n\}$$

een aftelbare vereniging van eindige verzamelingen, dus aftelbaar.

Nu bewijzen we (3.5) in het algemeen. Als $\mathcal{A}_x$ eindig is, dan is het bewijs al gegeven. Anders schrijven we $\mathcal{A}_x = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$. Dan hebben we al ingezien dat $\sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_{\alpha_j}\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ voor elke $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dus ook $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_{\alpha_j}\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Nu bewijzen we (3.3) in het algemeen. We mogen weer aannemen dat $\mathcal{A}_x$ niet eindig is en we behouden de (willekeurige) aftelling $\mathcal{A}_x = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ van zonet. Schrijf $s_n := \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_{\alpha_j}\rangle e_{\alpha_j}$. Dan geldt er voor $m > n$ dat

$$\|s_m - s_n\|^2 = \sum_{j=n+1}^{m} |\langle x, e_{\alpha_j}\rangle|^2,$$

dus omdat $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_{\alpha_j}\rangle|^2 < \infty$, zal $(s_n)$ een Cauchy-rij in $X$ zijn die convergeert naar een limiet $s$ in $X$. Nu bewijzen we dat $s - P_X x \perp e_\beta$ voor alle $\beta \in \mathcal{A}$, dus $s - P_X x \perp X$. Inderdaad,

$$\langle s - P_X x, e_\beta\rangle = \langle s, e_\beta\rangle - \langle P_X x, e_\beta\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_{\alpha_j}\rangle \langle e_{\alpha_j}, e_\beta\rangle - \langle x, e_\beta\rangle.$$

Als $\beta \in \mathcal{A}_x$ dan is $\beta = \alpha_k$ voor zekere $k$, dus dan is het rechterlid gelijk aan $\langle x, e_{\alpha_k}\rangle - \langle x, e_{\alpha_k}\rangle = 0$. Als $\beta \notin \mathcal{A}_x$, dan $\langle x, e_\beta\rangle = 0$ en $\langle e_{\alpha_j}, e_\beta\rangle = 0$ voor alle $j$, dus wederom wordt bovenstaand rechterlid gelijk 0. Dus in beide gevallen staat $s - P_X x$ loodrecht op $e_\beta$.
We hebben dus bewezen dat $s - P_X x \perp X$, maar ook $s - P_X x \in X$, dus $s - P_X x = 0$. Dus $\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_{\alpha_j}\rangle e_{\alpha_j} = P_X x$ onafhankelijk van de keuze van de aftelling van $\mathcal{A}_x$.

Nu bewijzen we (3.4) in het algemeen. We nemen weer een aftelling $\mathcal{A}_x = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$. Dan

$$\begin{aligned}\|P_X(x)\|^2 &= \langle P_X(x), \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_{\alpha_j}\rangle e_{\alpha_j}\rangle = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \overline{\langle x, e_{\alpha_j}\rangle}\, \langle P_X(x), e_{\alpha_j}\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\langle x, e_{\alpha_j}\rangle}\, \langle x, e_{\alpha_j}\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_{\alpha_j}\rangle|^2.\end{aligned}$$

Tenslotte bewijzen we onderdeel 4. Er geldt, met gebruik van Gevolg 3.15.1 en Propositie 3.14.5 dat

$$\|P_X(x)\|^2 = \|x\|^2 \iff \|P_{X^\perp}(x)\|^2 = 0 \iff P_{X^\perp}(x) = 0 \iff P_X(x) = x.$$

De uitspraak $\|P_X(x)\|^2 = \|x\|^2$ is wegens (3.4) equivalent met de uitspraak $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 = \|x\|^2$. De uitspraak $P_X(x) = x$ is wegens (3.3) equivalent met de uitspraak $\sum_{\alpha\in A} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha = x$ en wegens Definitie 3.13 equivalent met de uitspraak $x \in X$. □

**Bewijs van Gevolg 3.19** Volgens Definitie 2.32 is het orthonormale stelsel $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ een orthonormale basis van $H$ desda $X = H$, waarbij $X$ de afsluiting is van het lineaire opspansel van de $e_\alpha$ ($\alpha \in \mathcal{A}$). De equivalentie van (i) met (iii) en (iv) volgt nu uit onderdeel 4 van Stelling 3.18.

Voor het bewijs dat (i)$\iff$(ii) nemen we eerst aan dat $X = H$. Dan staat iedere vector die loodrecht staat op $e_\alpha$ voor alle $\alpha \in \mathcal{A}$, ook loodrecht op $X$, dus loodrecht op $H$, dus zo'n vector is 0. Dit bewijst de maximaliteit van het orthonormale stelsel.

Zij omgekeerd het stelsel $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ maximaal. Dan is $X^\perp = \{0\}$, want anders konden we het orthonormale stelsel $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ uitbreiden met een eenheidsvector uit $X^\perp$. Omdat $X^\perp = \{0\}$ is $X = H$.

Zie Vrst 3.4 voor het bewijs van (3.6). $\square$

**Bewijs van Stelling 3.21** Zij $E$ een orthonormaal stelsel in $H$. Beschouw de orthonormale stelsels in $H$ die $E$ bevatten, en orden deze door inclusie. Dit geeft een partiële ordening. Het bewijs loopt verder parallel met het bewijs van Stelling 2.34, met gebruik van het Lemma van Zorn. Werk de details uit in Vrst 3.5. $\square$

**Bewijs van Stelling 3.22**
(i) $\Longrightarrow$ (ii): Zij $E$ een orthonormale basis van $H$. De afstand tussen twee basisvectoren is dan $\sqrt{2}$. De open ballen $B(e_\alpha, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ om de basisvectoren $e_\alpha$ met straal $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ zijn dus disjunct. Zij nu $A \subset H$ een aftelbare dichte deelverzameling. In iedere bal kiezen we een element van $A$. Dit geeft een injectie van $E$ naar $A$, dus $E$ is aftelbaar.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Triviaal.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Zij $\{e_j\}_{j=1,2,\ldots}$ een aftelbare orthonormale basis van $H$. Laat $\mathbf{Q}$ een aftelbare dichte deelverzameling van $\mathbb{K}$ zijn. Kies

$$A := \left\{\sum_{j=1}^n q_j e_j :\ n \in \mathbb{Z}_{>0},\ q_j \in \mathbf{Q}\right\}.$$

De verzameling $A$ is aftelbaar. We laten zien dat $A$ dicht ligt. Neem $x \in H$ en $\varepsilon > 0$. We weten dat $\sum_j \langle x, e_j\rangle e_j$ naar $x$ convergeert. Er is dus een $n_0$ zo dat $\|x - \sum_{j=1}^{n_0}\langle x, e_j\rangle e_j\| < \varepsilon$. Verder zijn er nu $q_j \in \mathbf{Q}$ zo dat $\|\sum_{j=1}^{n_0}\langle x, e_j\rangle e_j - \sum_{j=1}^{n_0} q_j e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n_0} |\langle x, e_j\rangle - q_j|^2 < \varepsilon^2$. De driehoeksongelijkheid voltooit het bewijs. $\square$

**Bewijs van Stelling 3.24** Uit de lineaire algebra is bekend dat iedere eindig-dimensionale Hilbert-ruimte isomorf is met $\mathbb{R}^n$ of $\mathbb{C}^n$. Neem nu aan dat $H$ een niet-eindige aftelbare orthonormale basis $\{e_n\}$ bezit. De afbeelding $F\colon (c_1, c_2, \ldots) \mapsto \sum_j c_j e_j \colon l^2 \to H$ is goed gedefinieerd en surjectief wegens Gevolg 3.19. De isometrie-eigenschap volgt uit (3.6). $\square$

## 3.4 Gram-Schmidt orthogonalisatie

**Stelling 3.29.** *Zij $G = \{g_j\}$ een eindige of oneindige rij lineair onafhankelijke vectoren in een inproduct-ruimte $V$. Dan bestaat er een orthonormaal stelsel $E = \{e_j\}$ met de eigenschap dat* $\mathrm{Span}\{g_1, \ldots, g_n\} = \mathrm{Span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ *voor elke $n$ met $g_n \in G$.*

**Bewijs en Constructie** Definieer $e_1 := g_1/\|g_1\|$. Veronderstel nu dat $e_1, \ldots, e_n$ orthonormaal gevonden zijn met de eigenschap dat $X_k := \mathrm{Span}\{g_1, \ldots, g_k\} = \mathrm{Span}\{e_1, \ldots, e_k\}$ voor $1 \le k \le n$. Definieer nu

$$e_{n+1} := \frac{g_{n+1} - P_{X_n} g_{n+1}}{\|g_{n+1} - P_{X_n} g_{n+1}\|}. \tag{3.10}$$

Omdat $g_{n+1} \notin \mathrm{Span}(X_n)$ is het rechterlid goed gedefinieerd. Het is duidelijk dat $e_{n+1} \perp X_n$. Verder is duidelijk dat $\|e_{n+1}\| = 1$. Tenslotte is $\mathrm{Span}\{g_1, \ldots, g_{n+1}\} = \mathrm{Span} E_n \cup \{e_{n+1}\}$. Immers $\mathrm{Span}\{g_1, \ldots, g_n\} = \mathrm{Span} X_n$ en $g_{n+1} = \|g_{n+1} - P_{X_n}(g_{n+1})\|\, e_{n+1} + P_{X_n} g_{n+1}$. $\square$

Om in (3.10) $e_{n+1}$ concreet uit te rekenen, gebruiken we formule (3.3) voor het berekenen van $P_{X_n} g_{n+1}$, dus

$$P_{X_n} g_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \langle g_{n+1}, e_j \rangle e_j.$$

**Opmerking 3.30.** Een bezwaar van het Gram-Schmidt algoritme is dat er in elke stap in (3.10) door de norm gedeeld wordt. Als we bijv. beginnen met vectoren $g_j$ in $\mathbb{R}^m$ met geheeltallige coördinaten, dan zullen er al snel vectoren $e_j$ geproduceerd worden die coördinaten met wortels hebben. Dit maakt de berekening log, zowel met de hand als op de computer. In de praktijk is het daarom handiger om te orthogonaliseren i.p.v. te orthonormaliseren. Eventueel kan het verkregen orthogonale stelsel dan tot slot nog georthonormaliseerd worden.

Beginnend met $G = \{g_j\}$ construeren we nu een orthogonaal stelsel $F = \{f_j\}$ met de eigenschap dat $\operatorname{Span}\{g_1, \ldots, g_n\} = \operatorname{Span}\{f_1, \ldots, f_n\}$ voor elke $n$ met $g_n \in G$:

Definieer $f_1 := g_1$. Veronderstel nu dat $f_1, \ldots, f_n$ orthogonaal gevonden zijn met de eigenschap dat $X_k := \operatorname{Span}\{g_1, \ldots, g_k\} = \operatorname{Span}\{f_1, \ldots, f_k\}$ voor $1 \leq k \leq n$. Definieer nu

$$f_{n+1} := g_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle g_{n+1}, f_j \rangle}{\langle f_j, f_j \rangle} f_j. \tag{3.11}$$

Met inductie naar $n$ zien we dat $f_n = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} g_k$ met $c_{n,n} = 1$.

Voorbeeld 3.26.2 is verkregen door Gram-Schmidt orthogonalisatie toe te passen op de polynomen $1, x, x^2, x^3$ volgens algoritme (3.11). Daardoor zijn de nieuw verkregen polynomen *monisch*, d.w.z. met coëfficiënt van de term van hoogste graad gelijk aan 1.

Algemener kun je de oneindige rij van monomen $1, x, x^2, x^3, \ldots$ orthogonaliseren t.o.v. het inproduct van Voorbeeld 3.26.2. Je krijgt dan een rij $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots$ van orthogonale polynomen t.o.v. dit inproduct, waarbij $P_n(x)$ een monisch polynoom van graad $n$ is. Van deze polynomen kan bewezen worden dat ze een orthogonale basis vormen van $L^2([-1,1])$, dit is de completering van $C([-1,1])$ t.o.v. dit inproduct. De polynomen $P_n(x)$ heten *Legendre-polynomen*. Ze hebben fraaie eigenschappen.

## Opgaven

**Vrst 3.1.** Zij $V$ een inproduct-ruimte. Laat zien:

a) voor vaste $y$ is de afbeelding $x \mapsto \langle x, y \rangle \colon V \to \mathbb{K}$ continu;

b) voor vaste $x$ is de afbeelding $y \mapsto \langle x, y \rangle \colon V \to \mathbb{K}$ continu;

c) de afbeelding $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \colon V \times V \to \mathbb{K}$ is continu.

**Vrst 3.2.** Bewijs Propositie 3.12.

**Vrst 3.3.** Bewijs Gevolg 3.15.

**Vrst 3.4.** Zij $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ een orthonormale basis van $H$. Bewijs (3.6).

**Vrst 3.5.** Werk de details uit van het bewijs van Stelling 3.21.

**Vrst 3.6.** Definitie 3.23 kan al worden gegeven voor inproduct-ruimten $H_1$ en $H_2$ (dus niet noodzakelijk volledig). Laat verder zien dat een surjectieve afbeelding $F\colon H_1 \to H_2$ zo dat $\langle Fx, Fy\rangle = \langle x, y\rangle$ voor alle $x, y \in H$, een isometrie is.
(Als $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dan is een surjectieve afbeelding $F\colon H_1 \to H_2$ zo dat $\|Fx\| = \|x\|$ voor alle $x \in H$, reeds een isometrie. Als $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dan is dit niet waar: de afbeelding $z \mapsto \overline{z}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ geeft dan een tegenvoorbeeld.)

**Vrst 3.7.** Op $\mathbb{R}^2$ leggen we een norm door $\|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. Laat $I = [-1, 1] \times \{1\}$ en $y = (1/2, 1/2)$. Bereken $d(I, y)$ en laat zien dat de afstand voor verschillende $x \in I$ wordt aangenomen, terwijl $I$ compact en convex is.

**Vrst 3.8.** Zij $V$ de lineaire deelruimte van $C([0, 1]; \mathbb{R})$ die bestaat uit de functies $f$ van de vorm $f(x) = ax$ ($a \in \mathbb{R}$). Zij 1 de functie identiek 1 op $[0, 1]$. Bereken $d(1, V)$ en laat zien dat de afstand wordt aangenomen voor verschillende $f \in V$.

**Vrst 3.9.** Zij $X$ de lineaire deelruimte van $C([0, 1]; \mathbb{R})$ (met sup-norm) bestaande uit functies $f$ met $f(1) = 0$. Laat zien dat $X$ een gesloten deelverzameling is, dus een Banach-ruimte. Zij nu $Y$ de lineaire deelruimte van $X$ bestaande uit functies $f \in X$ waarvoor $\int_0^1 f(t)\, dt = 0$. Bewijs dat $Y$ een gesloten deelverzameling is. Bereken de afstand van de functie $f(t) := 1 - t$ tot $Y$ en laat zien dat deze **niet** wordt aangenomen, d.w.z. er bestaat geen $g \in Y$ met $d(g, f) = d(Y, f)$.

**Vrst 3.10.** Definieer $l^2(\mathbb{Z})$ als de ruimte van alle complexwaardige functies $n \mapsto x_n$ op $\mathbb{Z}$ waarvoor $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty$. We kunnen de elementen van $l^2(\mathbb{Z})$ ook opvatten als dubbel-oneindige rijen $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots)$ en voor $x \in l^2(\mathbb{Z})$ definiëren we $\|x\|_2 := \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Definieer voor $x, y \in l^2(\mathbb{Z})$

$$\langle x, y\rangle := \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\, \overline{y_n}. \tag{3.12}$$

Bewijs dat dit inproduct goed gedefinieerd is (gebruik gevolg 3.6) en dat $l^2(\mathbb{Z})$ zo een inproduct-ruimte wordt. Geef een isometrische afbeelding van $l^2$ op $l^2(\mathbb{Z})$, en concludeer hieruit dat $l^2(\mathbb{Z})$ een Hilbert-ruimte is.

**Vrst 3.11.** Laat zien dat de elementen $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ van $l^2(\mathbb{Z})$ met $x_n = x_{-n}$ voor alle $n$ een gesloten lineraire deelruimte van $l^2(\mathbb{Z})$ vormen. Beschrijf het orthoplement.

**Vrst* 3.12.** Zij $H$ de ruimte van continue functies op $\mathbb{R}$, bestaande uit eindige sommen

$$f(t) = \sum_1^n c_j e^{i\lambda_j t}, \quad \lambda_j \in \mathbb{R},\ c_j \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}.$$

Leg op $H$ een inproduct door

$$\langle f, g\rangle = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

Laat zien dat de functies $e^{iat}$, $a \in \mathbb{R}$ een orthogonaal stelsel vormen. Is (de completering van) $H$ separabel?

**Vrst 3.13.** Orthogonaliseer de rij $1, x, x^2, x^3, x^4$ in $C([-1,1])$ t.o.v. het inproduct (2.13) met $a = -1$, $b = 1$.

**Vrst 3.14.** Bepaal het polynoom $P$ van graad 4 dat de functie $|x|$ het best benadert in de inproduct-ruimte van Vrst 3.13.

**Vrst* 3.15.** Beschouw de lineaire deelruimte $V \subset C([0,\pi])$ bestaande uit eindige lineaire combinaties van de functies $x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x, \ldots$. Neem op $V$ het inproduct (2.13) met $a = 0$, $b = \pi$. Laat zien dat het orthogonale stelsel $\sin 2x, \sin 3x, \sin 4x, \ldots$ maximaal is in $V$ maar dat het geen orthogonale basis van de completering van $V$ is.

**Vrst 3.16.** Laat $P_n$ een reëelwaardig polynoom van graad $n$ zijn. Veronderstel dat

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, Q(x)\, dx = 0$$

voor alle polynomen $Q$ van graad $< n$. Bewijs dat $P_n$ ten minste, en dus precies $n$ keer van teken wisselt op $(-1,1)$. Concludeer dat $P_n(1) \neq 0$.

# 4 Eenvoudige operatorentheorie

## 4.1 Begrensde lineaire operatoren

Een lineaire afbeelding $L$ van een vectorruimte $V$ naar een vectorruimte $W$ wordt ook vaak een *lineaire operator* genoemd.

**Definitie 4.1.** Een lineaire operator $L$ van een genormeerde vectorruimte $V$ naar een genormeerde vectorruimte $W$ heet *begrensd* als er een $C > 0$ bestaat zo dat

$$\|Lx\| \leq C\|x\| \quad \text{voor alle } x \in V. \tag{4.1}$$

De *operatornorm* van een begrensde lineaire operator $L$ wordt gedefinieerd door

$$\|L\| := \inf\{C : (4.1) \text{ geldt}\}. \tag{4.2}$$

Het infimum in (4.2) wordt altijd aangenomen (ga na), dus is in feite een minimum. Als $\|L\|\colon V \to W$ begrensd is, dan geldt er dus dat

$$\|Lx\| \leq \|L\|\,\|x\| \quad \text{voor alle } x \in V. \tag{4.3}$$

Begrensdheid en norm van een lineaire operator kunnen equivalent als volgt gekenmerkt worden:

**Propositie 4.2.** *Laten $V$ en $W$ genormeerde vectorruimten zijn. De gesloten eenheisdbal in $V$ noemen we $B$. Zij $L\colon V \to W$ lineair. Dan is $L$ een begrensde operator desda $L(B)$ een begrensde deelverzameling van $W$ is. Als $L$ begrensd is dan*

$$\|L\| = \sup_{x \in B} \|Lx\|. \tag{4.4}$$

Zie voor het bewijs Vrst 4.1. Het supremum in (4.4) wordt niet altijd aangenomen (zie Vrst 4.2).

**Voorbeeld 4.3.** Zij $H$ een Hilbert-ruimte, $X \neq \{0\}$ een gesloten lineaire deelruimte, en $P_X\colon H \to H$ de orthogonale projectie van $H$ op $X$. Dan volgt er uit Propositie 3.14 en Gevolg 3.15 dat $P_X$ lineair is en dat $\|P_X(x)\| \leq \|x\|$ voor alle $x \in H$, met gelijkheid desda $x \in X$. Dus $P_X$ is een begrensde lineaire operator met operatornorm $\|P_X\| = 1$.

**Stelling 4.4.** *Voor een lineaire operator $L\colon V \to W$ ($V$ en $W$ genormeerde vectorruimten) zijn equivalent:*

*(i) $L$ is uniform continu, d.w.z., bij iedere $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zo dat $\|Lx - Ly\| < \varepsilon$ als $\|x - y\| < \delta$.*

*(ii) $L$ is continu in alle punten van $V$.*

*(iii) $L$ is continu in minstens één punt van $V$.*

*(iv) $L$ is begrensd.*

**Bewijs** De implicaties van (i) naar (ii) en van (ii) naar (iii) zijn evident.
(iii) $\implies$ (iv): Als $L$ continu is in het punt $x_0$ van $V$, dan is er een $\delta > 0$ zo dat geldt: $\|Lx - Lx_0\| \leq 1$ als $\|x - x_0\| \leq \delta$. Dus vinden we met $y = x - x_0$ en de lineariteit van $L$ dat $\|Ly\| \leq 1$ als $\|y\| \leq \delta$, en vervolgens met $z = \delta^{-1}y$ dat $\|Ly\| \leq \delta^{-1}\|y\|$ als $\|y\| \leq 1$.
(iv) $\implies$ (i): Zij $\varepsilon > 0$. Er is een $C > 0$ met $\|Lx\| \leq C\|x\|$ voor alle $x \in V$. Dus

$$\|Lx - Lx_0\| = \|L(x - x_0)\| \leq C\|x - x_0\| < \varepsilon \quad \text{als } \|x - x_0\| < \varepsilon/C. \quad \square$$

Vanaf nu staat **BLO** voor *begrensde lineaire operator*. We noteren de verzameling BLO's van $V$ naar $W$ met $\mathcal{B}(V, W)$. De *kern* of *nulruimte* van een lineaire operator $L\colon V \to W$ is

$$\mathcal{N}(L) := \{x \in V : \ Lx = 0\},$$

een lineaire deelruimte van $V$. Als $L$ begrensd is dan is $\mathcal{N}(L)$ gesloten in $V$. Het *beeld* (Eng.: *range*) van een lineaire operator $L\colon V \to W$ is

$$\mathcal{R}(L) := \{Lx : \ x \in V\},$$

een lineaire deelruimte van $W$. Voor begrensde $L$ is $\mathcal{R}(L)$ niet noodzakelijk gesloten (zie Vrst 4.15).

**Stelling 4.5.** *Laat $V$ een genormeerde lineaire ruimte zijn en $W$ een Banach-ruimte. Dan vormt $\mathcal{B}(V, W)$ een Banach-ruimte met de natuurlijke vectorruimte-structuur en met als norm de operatornorm.*

**Bewijs** We leggen een vectorruimte-structuur op $\mathcal{B}(V, W)$ door $(L_1 + L_2)(x) := L_1x + L_2x$, $(\lambda L)(x) := \lambda(Lx)$. Als $L_1, L_2 \in \mathcal{B}(V, W)$ dan geldt voor alle $x \in V$ dat

$$\|(L_1 + L_2)x\| \leq \|L_1x\| + \|L_2x\| \leq (\|L_1\| + \|L_2\|)\|x\|,$$

dus $L_1 + L_2$ is begrensd en $\|L_1 + L_2\| \leq \|L_1\| + \|L_2\|$. Nog eenvoudiger zien we dat voor begrensde $L$ ook $\lambda L$ begrensd is met $\|\lambda L\| = |\lambda|\,\|L\|$, en dat $L = 0$ als $\|L\| = 0$. Dus de operatornorm is een echte norm.

Nu de volledigheid. Als $(L_n)$ een Cauchy-rij is, dan is de rij $(\|L_n\|)$ zeker begrensd, zeg door $C$, dit volgt uit de driehoeksongelijkheid; verder is dan voor iedere $x \in V$ de rij $(L_nx)$ Cauchy, immers $\|L_nx - L_mx\| \leq \|L_n - L_m\|\,\|x\|$. Omdat $W$ volledig is, bestaat $Lx := \lim_{n\to\infty} L_nx$. Het is duidelijk dat hierdoor een lineaire operator $L$ wordt gedefinieerd. Deze operator is begrensd, want $\|Lx\| = \lim_{n\to\infty} \|L_nx\| \leq C\|x\|$ (hierbij gebruikten we dat de afbeelding $y \to \|y\|\colon W \to \mathbb{K}$ continu is). Tenslotte moeten we bewijzen dat $L_n \to L$ in operatornorm-topologie. Neem $\varepsilon > 0$. Dan $\|(L - L_n)(x)\| = \lim_{m\to\infty} \|(L_m - L_n)(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$ voor $n$ voldoende groot, en dus $\|L - L_n\| \to 0$ als $n \to \infty$. $\square$

**Definitie 4.6.** Neem i.h.b. het geval dat $W = \mathbb{K}$. Omdat $\mathbb{K}$ volledig is, is $\mathcal{B}(V, \mathbb{K})$ voor elke genormeerde vectorruimte $V$ een Banach-ruimte. Deze ruimte noteren we ook als $V^*$ en we noemen hem de *duale* van $V$. Die ruimte bestaat uit alle continue lineaire functionalen op $V$.

Hieronder volgen een aantal voorbeelden van begrensde lineaire operatoren $L\colon V \to W$ ($V$ en $W$ genormeerde vectorruimten). In vraagstukken zal worden gevraagd om de beweringen in deze voorbeelden te bewijzen.

**Voorbeeld 4.7.** Als $V$ eindig-dimensionaal is dan is elke lineaire afbeelding van $V$ naar $W$ begrensd. In het bijzonder geldt dit dan als $V$ en $W$ allebei eindig-dimensionaal zijn.

**Voorbeeld 4.8.** Zij $V := \mathbb{K}^n$, $W := \mathbb{K}^m$, allebei met standaard-inproduct, en zij $A$ een $m \times n$ matrix is met matrixelementen $a_{ij}$ in $\mathbb{K}$. Dan induceert $A$ een begrensde lineaire afbeelding $L_A \colon V \to W$. Er geldt dat

$$\|L_A\|^2 \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2. \tag{4.5}$$

**Voorbeeld 4.9.** $V := C([0,1])$ met sup-norm, $x \in [0,1]$, $\delta_x(f) := f(x)$. Dan $\delta_x \in V^*$ en $\|\delta_x\| = 1$.
Als we echter $V := C([0,1])$ met $L^2$-norm nemen, dan is de lineaire afbeelding $\delta_x \colon V \to \mathbb{C}$ niet begrensd.

**Voorbeeld 4.10.** $V = W := l^2$. De *linker-shiftoperator* $L_l$ en de *rechter-shiftoperator* $L_r$ worden als volgt gedefinieerd:

$$L_l(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (x_2, x_3, \ldots), \tag{4.6}$$

$$L_r(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (0, x_1, x_2, x_3, \ldots). \tag{4.7}$$

Beide operatoren zijn begrensd en hebben norm 1.

**Voorbeeld 4.11.** $V = W := l^2$. Zij $a = (a_1, a_2, \ldots) \in l^\infty$ en $Lx := (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots)$. Dan is $L$ begrensd met $\|L\| = \|a\|_\infty$.

**Voorbeeld 4.12.** Zij $C([a,b])$ een inproductruimte t.o.v. het inproduct (2.13). Zij $K$ een continue functie op $[a,b] \times [a,b]$. Neem $V = W := C([a,b])$ en $L_K \colon V \to V$ gedefinieerd door

$$(L_K f)(x) := \int_a^b K(x,y)\, f(y)\, dy. \tag{4.8}$$

Dan is $L_K$ begrensd en $\|L_K\| \leq \|K\|_2$, d.w.z.

$$\|L_K\|^2 \leq \int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2\, dx\, dy. \tag{4.9}$$

Zulke operatoren heten *Hilbert-Schmidt operatoren.*
(Algemener kunnen ze gedefinieerd worden op ruimten $L^2(X)$ met $K \in L^2(X \times X)$.)
Merk op dat (4.9) een analogon is van (4.5).

**Voorbeeld 4.13.** Zij $V$ een inproductruimte en $y \in V$. Definieer de lineaire afbeelding $\phi_y \colon V \to \mathbb{K}$ door $\phi_y(x) := \langle x, y \rangle$. Dan $\phi_y \in V^*$ en $\|\phi_y\| = \|y\|$.

**Propositie 4.14.** *Als $V_1, V_2, V_3$ genormeerde lineaire ruimten en $L_1 \colon V_1 \to V_2$ em $L_2 \colon V_2 \to V_3$ BLO's zijn, dan is de productoperator $L_2 L_1 \colon V_1 \to V_3$, gegeven door $(L_2 L_1)(x) := (L_2 \circ L_1)(x) = L_2(L_1 x)$, ook een BLO en*

$$\|L_2 L_1\| \leq \|L_2\|\, \|L_1\|. \tag{4.10}$$

**Bewijs** Voor $x \in V_1$ kunnen we schrijven:

$$\|(L_2 L_1)(x)\| = \|L_2(L_1 x)\| \leq \|L_2\|\, \|L_1 x\| \leq \|L_2\|\, \|L_1\|\, \|x\|. \quad \square$$

**Opmerking 4.15.** Soms spreekt men al van een lineaire operator $L\colon V \to W$ ($V$ en $W$ genormeerde lineaire ruimten) als $Lx$ niet voor alle $x \in V$ gedefinieerd is, maar slechts voor $x$ in een linaire deelruimte $D = D(L)$ van $V$ zo dat $L\colon D \to W$ lineair is. De ruimte $D(L)$ wordt het *domein* van $L$ genoemd. Dan is het beeld van $L$ gegeven door $\mathcal{R}(L) := \{Lx : \ x \in D(L)\}$.

Vaak is het domein $D(L)$ dicht in $V$, maar niet per definitie. Als $D(L)$ dicht is in $V$ dan zouden we graag $L$ willen uitbreiden, liefst uniek, tot een BLO van $V$ naar $W$. De volgende propositie beschrijft wanneer dat mogelijk is.

**Propositie 4.16.** *Zij $D$ een dichte lineaire deelruimte van een genormeerde vectorruimte $V$ en zij $L\colon D \to W$ een lineaire afbeelding ($W$ genormeerde vectorruimte). Als $L$ uitbreidbaar is tot een BLO $L_1\colon V \to W$ dan is $L$ een BLO met $\|L\| = \|L_1\|$ en dan is deze uitbreiding uniek. Omgekeerd, als $L$ een BLO is en als $W$ een Banach-ruimte is, dan is $L$ (uniek) uitbreidbaar tot een BLO $L_1\colon V \to W$.*

**Bewijs** Stel eerst dat $L_1\colon V \to W$ een BLO is die $L\colon D \to W$ uitbreidt. Dan geldt voor $x \in D$ dat $\|Lx\| = \|L_1x\| \le \|L_1\|\,\|x\|$. Dus $L$ is begrensd met $\|L\| \le \|L_1\|$. Maar dan geldt voor $x \in D$ ook dat $\|L_1x\| = \|Lx\| \le \|L\|\,\|x\|$. Neem nu $x \in V$ en een rij $(x_n)$ in $D$ die naar $x$ convergeert. Dan kunnen we in de ongelijkheid $\|L_1x_n\| \le \|L\|\,\|x_n\|$ de limiet voor $n \to \infty$ nemen. Dat levert vanwege de continuïteit van $L_1$ en van de norm dat $\|L_1x\| \le \|L\|\,\|x\|$. Dus ook $\|L_1\| \le \|L\|$. Dus $\|L_1\| = \|L\|$.

Als $L_1$ en $L_2$ twee BLO's zijn die $L$ tot $V$ uitbreiden, dan is $L_1 - L_2$ een BLO die de nul-afbeelding tot $V$ uitbreidt. Dus $\|L_1 - L_2\| = 0$, dus $L_1 - L_2 = 0$, dus $L_1 = L_2$. Dus de uitbreiding van $L$ is uniek.

Stel nu dat $L\colon D \to W$ begrensd is en $W$ een Banach-ruimte. Zij $x \in V$. Neem een rij $(x_n)$ in $D$ die naar $X$ convergeert. Deze rij is dan ook Cauchy en er volgt uit $\|Lx_n - Lx_m\| \le \|L\|\,\|x_n - x_m\|$ dat de rij $(Lx_n)$ Cauchy is in $W$, dus een limiet in de volledige ruimte $W$ heeft, die we $L_1x$ noemen. Er volgt onmiddellijk dat de limiet onafhankelijk is van de keuze van de rij $(x_n)$, dat $L_1\colon V \to W$ lineair is, en dat $L_1$ beperkt to $D$ gelijk aan $L$ is. Tenslotte laten we zien dat $L_1$ begrensd is. Laat weer $x \in V$ en $x_n \to x$ met $x_n \in D$. Dan $\|Lx_n\| \le \|L\|\,\|x_n\|$ en, met $n \to \infty$, $\|L_1x\| \le \|L\|\,\|x\|$. □

Details van de volgende twee voorbeelden zullen weer in de vraagstukken worden uitgewerkt.

**Voorbeeld 4.17.** Zij $V = W := l^2$ en zij $D$ de dichte lineaire deelruimte van $l^2$ die bestaat uit alle $x = (x_1, x_2, \ldots)$ met $x_n \ne 0$ voor slechts eindig veel $n$. Definieer de lineaire afbeelding $L\colon D \to l^2$ door $(Lx)_n := nx_n$. Dan is $L$ geen BLO, dus $L$ is niet uitbreidbaar tot een BLO $L_1\colon l^2 \to l^2$.

**Voorbeeld 4.18.** Zij $V = W := C([0,1])$ met de sup-norm en $D := C^1([0,1])$, een dichte lineaire deelruimte van $C([0,1])$. Definieer de lineaire afbeelding $L\colon C^1([0,1]) \to C([0,1])$ door $(Lf)(x) := f'(x)$. Dan is $L$ niet begrensd, dus $L$ is niet uitbreidbaar tot een BLO $L_1\colon C([0,1]) \to C([0,1])$.

## 4.2 De duale van een Hilbert-ruimte

Als in Voorbeeld 4.13 de inproductruimte $V$ volledig is, dan is elke continue lineaire functionaal van de vorm $\phi_y$. Dit is de inhoud van de volgende stelling, die in 1907 tegelijk door F. Riesz en door Fréchet werd bewezen.

**Stelling 4.19.** *Iedere continue lineaire functionaal $\phi$ op een Hilbert-ruimte $H$ is van de vorm $\phi(x) = \phi_y(x) := \langle x, y\rangle$ voor een unieke $y \in H$.*

**Bewijs** De uniciteit volgt onmiddellijk: Als $\phi_y = \phi_z$ dan $\langle x, y-z\rangle = 0$ voor alle $x$ dus $y-z = 0$. Nu de existentie. Zij $\phi \in H^*$. Als $\phi = 0$ dan $\phi = \phi_y$ met $y = 0$. Als $\phi \neq 0$ dan is $V := \mathcal{N}(\phi)$ een gesloten lineaire deelruimte van $H$ en $V \neq H$. Dus $V^\perp \neq \{0\}$, dus er is $x_0 \in V^\perp$ met $\phi(x_0) = 1$. Dan $x - \phi(x)x_0 \in V$. Neem

$$y := \frac{x_0}{\langle x_0, x_0\rangle}$$

Dan $y \in V^\perp$, dus

$$\langle x, y\rangle = \langle x - \phi(x)x_0, y\rangle + \phi(x)\langle x_0, y\rangle = 0 + \phi(x) = \phi(x). \quad \square$$

Merk op dat in bovenstaand bewijs de afbeelding $x \mapsto x - \phi(x)x_0$ de orthogonale projectie $P_V$ van $H$ op $V$ is.

**Opmerking 4.20.** Stelling 4.19 samen met Voorbeeld 4.13 geven dat de afbeelding $x \mapsto \phi_x \colon H \to H^*$ bijectief is. Het is ook gemakkelijk na te gaan dat

$$\phi_{x+y} = \phi_x + \phi_y, \quad \phi_{\lambda x} = \overline{\lambda}\, \phi_x.$$

De afbeelding $x \mapsto \phi_x \colon H \to H^*$ is dus lineair als $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ maar geconjugeerd lineair als $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

We bespreken als een toepassing van Stelling 4.19 het begrip *reproducerende kern*. Dit doet zich ruwweg voor als we een Hilbert-ruimte $H$ van functies op een verzameling $X$ hebben waarbij het inproduct van $f$ en $g$ door een integraal van $f\,\overline{g}$ over $X$ wordt gegeven en waarbij voor elke $x \in X$ de lineaire functionaal $\delta_x \colon f \mapsto f(x)$ op $H$ continu is.

**Voorbeeld 4.21.** Neem $C([a,b])$ met inproduct gegeven door (2.13). Zij $V$ een eindig-dimensionale lineaire deelruimte van $C([a,b])$. Dan wordt $V$ met dit inproduct een eindig-dimensionale Hilbert-ruimte. Elke lineaire functionaal op $V$ is dan continu, dus zeker is voor elke $x \in [a,b]$ de lineaire functionaal $\delta_x \colon f \mapsto f(x) \colon V \to \mathbb{C}$ continu. Volgens Stelling 4.19 is er dan voor elke $x \in [a,b]$ een unieke functie $k_x \in V$ zo dat $\delta_x(f) = \langle f, k_x\rangle$ voor alle $f \in V$, i.e.,

$$f(x) = \int_a^b f(y)\,\overline{k_x(y)}\,dy \qquad (f \in V,\ x \in [a,b]). \tag{4.11}$$

Definieer $K(x,y) := \overline{k_x(y)}$. Dan

$$f(x) = \int_a^b f(y)\,K(x,y)\,dy, \tag{4.12}$$

waarbij $K(x,y)$ de *integraalkern* is van de integraaltransformatie $\Phi$ gegeven door

$$(\Phi f)(x) := \int_a^b f(y)\,K(x,y)\,dy, \tag{4.13}$$

die $f$ naar $f$ stuurt (die $f$ *reproduceert*) als $f \in V$. Vandaar de naam *reproducerende kern* voor $K(x,y)$.

We kunnen een andere uitdrukking vinden voor $K(x,y)$ door een willekeurige orthonormale basis $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ van $V$ te kiezen. Dan geldt dat

$$f = \sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle f_j \qquad (f \in V).$$

Dus voor alle $f \in V$:

$$f(x) = \int_a^b f(y) \Big( \textstyle\sum_{j=1}^n f_j(x)\, \overline{f_j(y)} \Big)\, dy = \int_a^b f(y)\, \overline{\tilde{k}_x(y)}\, dy$$

met

$$\tilde{k}_x(y) := \sum_{j=1}^{n} \overline{f_j(x)}\, f_j(y), \quad \text{dus } \tilde{k}_x \in V, \text{ dus } \quad \tilde{k}_x(y) = k_x(y).$$

Dus

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \overline{f_j(y)}\, f_j(x), \tag{4.14}$$

onafhankelijk van de keuze van de orthonormale basis voor $V$. We zien uit (4.14) ook dat $K$ continu is op $[a,b] \times [a,b]$ en dat $\overline{K(x,y)} = K(y,x)$.

We kunnen de afbeelding $\Phi$ gegeven door (4.13) opvatten als de orthogonale projectie van $C([a,b])$ op $V$. Immers, er volgt uit (4.13) en (4.14) dat

$$\Phi f = \sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle f_j \in V \qquad (f \in C([a,b]),$$

dus $\Phi$ beeldt $C([a,b])$ af naar $V$. Ook is $\Phi f = f$ als $f \in V$. Omdat $\overline{K(x,y)} = K(y,x)$, zien we dat voor $f, g \in C([a,b])$ geldt dat

$$\langle \Phi f, g \rangle = \int_a^b \int_a^b f(y)\, \overline{g(x)}\, K(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_a^b f(y)\, \overline{g(x)}\; \overline{K(y,x)}\, dx\, dy = \langle f, \Phi g \rangle.$$

Dus als $f \in C([a,b])$, $g \in V$ dan $\langle \Phi f, g \rangle = \langle f, \Phi g \rangle = \langle f, g \rangle$. Dus $\langle f - \Phi f, g \rangle = 0$ als $f \in C([a,b])$, $g \in V$. Hiermee is bewezen dat $\Phi$ de orthogonale projectie is van $C([a,b])$ op $V$.

## Opgaven

**Vrst 4.1.** Bewijs Propositie 4.2.

**Vrst 4.2.** Zij $V := C([0,1])$ en $L\colon V \to V$ de lineaire afbeelding gedefinieerd door $(Lf)(x) := x\, f(x)$.

a) Neem $V$ met de sup-norm. Laat zien dat $L$ begrensd is, bereken $\|L\|$ en laat zien dat het supremum in (4.4) wordt aangenomen.

b) Nu $V$ met de $L^2$-norm. Zelfde vragen over begrensdheid en norm van $L$. Laat nu zien dat het supremum in (4.4) niet wordt aangenomen.

**Vrst 4.3.** Bewijs dat elke lineaire afbeelding in het geval van Voorbeeld 4.7 begrensd is.

**Vrst 4.4.** Bewijs ongelijkheid (4.5)

**Vrst 4.5.** Zij $A = (a_{ij})$ een $n \times n$ matrix over $\mathbb{C}$, $V := \mathbb{C}^n$ met standaard-inproduct, en $L_A : V \to V$ de door $A$ geïnduceerde begrensde lineaire afbeelding zoals in Voorbeeld 4.8. Bewijs het volgende.

a) Als $A$ een unitaire matrix is dan $\|L_A\| = 1$.

b) Als $U$ een unitaire $n \times n$ matrix is en $A$ een willekeurige $n \times n$ matrix, dan $\|L_{UAU^{-1}}\| = \|L_A\|$.

c) Als $A$ een diagonaalmatrix is, dan $\|L_A\| = \max_{1 \le j \le n} |a_{jj}|$.

d) Als $A$ een hermitische matrix is, dan

$$\|L_A\| = \max\{|\lambda| : \ \lambda \text{ eigenwaarde van } A\} = \max_{\|x\| \le 1} |\langle Ax, x\rangle|. \tag{4.15}$$

**Vrst 4.6.** Bewijs de beweringen over $\delta_x$ in Voorbeeld 4.9. Eerst voor $C([0,1])$ met de sup-norm, dan voor $C([0,1])$ met de $L^2$-norm.

**Vrst 4.7.** Bewijs de beweringen in Voorbeeld 4.10.

**Vrst 4.8.** Bewijs de beweringen in Voorbeeld 4.11.

**Vrst 4.9.** Bewijs de beweringen in Voorbeeld 4.12.

**Vrst 4.10.** Bewijs de beweringen in Voorbeeld 4.13.

**Vrst 4.11.** Zij $H$ een Hilbert-ruimte en definieer $\phi_y \in H^*$ door $\phi_y(x) := \langle x, y\rangle$. Bewijs dat $H^*$ (reeds een genormeerde vectorruimte) een inproductruimte (en ook een Hilbert-ruimte) wordt met een inproduct $\langle \phi_x, \phi_y\rangle := \langle y, x\rangle$ $(x, y \in H)$.

**Vrst 4.12.** Zij $H$ een Hilbert-ruimte (waarvan we voor het gemak aannemen dat hij separabel en oneindig-dimensionaal is) met een orthonormale basis $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Bewijs dat voor het in Vrst 4.11 gedefinieerde inproduct op $H^*$ geldt dat

$$\langle \phi, \psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(e_n)\, \overline{\psi(e_n)} \qquad (\phi, \psi \in H^*). \tag{4.16}$$

**Vrst 4.13.** Bewijs de dichtheid van $D$ in $V$ en de onbegrensdheid van $L$ in Voorbeeld 4.17.

**Vrst 4.14.** Bewijs de dichtheid van $D$ in $V$ en de onbegrensdheid van $L$ in Voorbeeld 4.18.

**Vrst 4.15.** Zij $V := C([0,1])$ met de sup-norm en definieer $L : V \to V$ door

$$(Lf)(x) := \int_0^x f(y)\, dy.$$

Ga na dat $L$ begrensd is, bepaal $\|L\|$, bepaal $\mathcal{R}(L)$ en ga na dat $\mathcal{R}(L)$ niet gesloten is in $V$.

**Vrst 4.16.** Werk de details uit van Voorbeeld 4.21 voor het geval $C([-\pi, \pi])$ met $V$ de lineaire deelruimte van trigonometrische polynomen van graad $\le N$ en met de functies $x \mapsto (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{inx}$ $(n = -N, -N+1, \ldots, N)$ als orthonormale basis.

# 5 Speciale soorten lineaire operatoren

Vanaf nu schrijven we $\mathcal{B}(V) := \mathcal{B}(V, V)$ voor de ruimte van begrensde lineaire operatoren van $V$ naar $V$ ($V$ genormeerde vectorruimte).

## 5.1 Speciale operatoren op een Hilbert-ruimte

We brengen een aantal zaken uit de lineaire algebra in herinnering. Zij $H := \mathbb{C}^n$ met standaard-inproduct en zij $A\colon H \to H$ een lineaire afbeelding met matrix $(a_{ij})$.

De *geadjungeerde* van $A$ is de lineaire afbeelding $A^*\colon H \to H$ met matrix $(b_{ij})$ waarbij $b_{ij} := \overline{a_{ji}}$. Equivalent kunnen we $A^*$ definiëren in termen van $A$ door de betrekking

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle \quad \text{voor alle } x, y \in H. \tag{5.1}$$

We noemen de afbeelding $A\colon H \to H$ *hermitisch* of *zelfgeadjungeerd* als $A^* = A$, d.w.z. $\overline{a_{ij}} = a_{ji}$, of equivalent:

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \quad \text{voor alle } x, y \in H. \tag{5.2}$$

We noemen $A$ *unitair* als $A^* = A^{-1}$, d.w.z. dat

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \overline{a_{ik}} = \delta_{ij}$$

(de kolommen van $A$ vormen een orthonormaal stelsel), of equivalent:

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \quad \text{voor alle } x, y \in H. \tag{5.3}$$

Algemener kunnen deze definities op oneindig-dimensionale Hilbert-ruimten worden gegeven.

**Stelling 5.1.** *Zij $A \in \mathcal{B}(H)$. Dan is er een unieke $B \in \mathcal{B}(H)$ zo dat $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$ voor alle $x, y \in H$. Deze unieke operator $B$ schrijven we als $A^*$ en we noemen hem de* **geadjungeerde** *van $A$. Deze voldoet dus aan* (5.1)*. Verder geldt er dat*

$$(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*, \qquad (\lambda A)^* = \overline{\lambda}\, A^*, \tag{5.4}$$

$$(A^*)^* = A, \qquad (A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^*, \tag{5.5}$$

$$\|A^*\| = \|A\|, \qquad \|A^* A\| = \|A\|^2. \tag{5.6}$$

**Bewijs** Laat $y \in H$. Dan is de afbeelding $x \mapsto \langle Ax, y\rangle\colon H \to \mathbb{K}$ lineair en ook begrensd, want $|\langle Ax, y\rangle| \leq \|Ax\|\,\|y\| \leq \|A\|\,\|x\|\,\|y\|$. Dus wegens Stelling 4.19 is er een unieke $z \in H$ zo dat $\langle Ax, y\rangle = \phi_z(x) := \langle x, z\rangle$ voor alle $x \in H$. Definieer $A^* y := z$. Je controleert nu eenvoudig dat $A^*$ lineair is.

Om te bewijzen dat $A$ begrensd is merken we op dat $|\phi_{A^*y}(x)| = |\langle Ax, y\rangle| \leq \|A\|\,\|y\|\,\|x\|$, dus $\|A^* y\| = \|\phi_{A^*y}\| \leq \|A\|\,\|y\|$, dus $\|A^*\| \leq \|A\|$.

Er volgt eenvoudig dat de identiteiten in (5.5) gelden. Dan volgt er dat $A^* = A$ want we hadden al dat $\|A^*\| \leq \|A\|$, dus ook $\|A\| = \|(A^*)^*\| \leq \|A^*\|$.

Tenslotte bewijzen we dat $\|A^* A\| = \|A\|^2$. Enerzijds geldt er dat $\|A^* A\| \leq \|A^*\|\,\|A\| = \|A\|\,\|A\| = \|A\|^2$. Dus $\|A^* A\| \leq \|A\|^2$. Anderzijds geldt er voor elke $x \in H$ dat

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^* Ax, x\rangle = |\langle A^* Ax, x\rangle| \leq \|A^* Ax\|\,\|x\| \leq \|A^* A\|\,\|x\|^2.$$

Dus $\|Ax\| \le \|A^*A\|^{\frac{1}{2}} \|x\|$ voor alle $x \in H$. Dus $\|A\| \le \|A^*A\|^{\frac{1}{2}}$, dus $\|A\|^2 \le \|A^*A\|$. □

De ruimte $\mathcal{B}(H)$ ($H$ een Hilbert-ruimte) is een voorbeeld van een *$C^*$-algebra* (een vectorruimte met een associatieve en distributieve vermenigvuldiging en met een $*$-operatie die aan eigenschappen (5.4)–(5.6) voldoet).

**Propositie 5.2.** *Zij $A \in \mathcal{B}(H)$ met $H$ een Hilbert-ruimte. Dan geldt:*

1. $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^*)^\perp$.
2. $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$.
3. $\mathcal{N}(A)^\perp = \overline{\mathcal{R}(A^*)}$.
4. $\mathcal{N}(A^*)^\perp = \overline{\mathcal{R}(A)}$.

**Bewijs** Zie Vrst 5.2. □

**Definitie 5.3.** Een BLO $A\colon H \to H$ op een Hilbert-ruimte $H$ heet *zelfgeadjungeerd* als $A^* = A$ of als, equivalent, (5.2) geldt.

Er is een generalisatie van deze definitie voor onbegrensde operatoren gedefinieerd op een dicht domein van een Hilbert-ruimte. In de natuurkunde-literatuur wordt meestal over *hermitische operatoren* gesproken, vooral i.v.m. quantummechanica.

Voor een zelfgeadjungeerde operator geldt (zie Vrst 5.3) dat

$$\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R} \quad \text{en} \quad -\|A\|\,\|x\|^2 \le \langle Ax, x\rangle \le \|A\|\,\|x\|^2 \quad \text{voor alle } x \in H. \tag{5.7}$$

Een zelfgeadjungeerde operator $A\colon H \to H$ heet *positief-definiet* als $\langle Ax, x\rangle \ge 0$ voor alle $x \in H$. Orthogonale projecties kunnen als speciale zelfgeadjungeerde operatoren worden gekarakteriseerd (bewijs in Vrst 5.5):

**Propositie 5.4.** *Zij $H$ een Hilbert-ruimte en $A \in \mathcal{B}(H)$. Dan is $A$ een orthogonale projectie op een gesloten lineaire deelruimte van $H$ desda $A^2 = A$ en $A^* = A$.*

**Definitie 5.5.** Een BLO $A\colon H \to H$ op een Hilbert-ruimte $H$ heet *unitair* als $A$ het inproduct behoudt (dus als (5.3) geldt) en $A$ bovendien surjectief is.

**Opmerking 5.6.** Als $A$ het inproduct behoudt dan noemen we $A$ een *isometrie* van $H$ in (maar niet noodzakelijk op) $H$. Zie bijv. de rechter-shiftoperator $L_r\colon l^2 \to l^2$ in (4.7). Dit is een niet-surjectieve isometrie. (We eisen dus geen bijectiviteit meer voor een isometrie, zoals we in Definitie 3.23 deden.)

Als $A$ een isometrie is dan heeft $A$ operatornorm 1. I.h.b. hebben unitaire operatoren operatornorm 1. Elke unitaire operator $A$ is inverteerbaar en $A^{-1}$ is dan ook unitair. Unitaire operatoren kunnen ook gekarakteriseerd worden als inverteerbare BLO's $A$ waarvoor $A^* = A^{-1}$.

Als $A\colon H \to H$ een afbeelding is die het inproduct behoudt, dan is $A$ lineair en begrensd, dus een isometrie.

**Voorbeeld 5.7.** Neem $L\colon l^2 \to l^2$ als in Voorbeeld 4.11, dus $Lx := (a_1x_1, a_2x_2, \ldots)$ met $a \in l^\infty$. Dan:

1. $L^*x = (\overline{a_1}\, x_1, \overline{a_2}\, x_2, \ldots)$.

2. $L$ is zelfgeadjungeerd desda $a_n \in \mathbb{R}$ voor alle $n$.

3. $L$ is positief-definiet zelfgeadjungeerd desda $a_n \geq 0$ voor alle $n$.

4. $L$ is een orthogonale projectie desda $a_n = 1$ of $0$ voor alle $n$.

5. $L$ is unitair desda $|a_n| = 1$ voor alle $n$.

## 5.2 Compacte operatoren

Compacte operatoren zijn een van de belangrijkste soorten BLO's. Als opstapje naar de compacte operatoren, maar ook als belangrijk hulpmiddel voor benadering van compacte operatoren, bespreken we eerst operatoren van eindige rang.

In het vak Lineaire algebra leerde je i.v.m. een lineaire afbeelding $L\colon V \to W$ ($V$ en $W$ eindig-dimensionale ruimten) het begrip *rang* van $L$, dit is de dimensie van de beeldruimte $\mathcal{R}(L)$ van $L$. Deze definitie kunnen we aanhouden als $V$ en $W$ niet noodzakelijk eindig-dimensionaal zijn (ze hoeven nog niet genormeerd te zijn). Dan noemen we de lineaire afbeelding $L\colon V \to W$ *van eindige rang* als $\mathcal{R}(L)$ eindige dimensie heeft. De *rang* van $L$ is dan de dimensie van $\mathcal{R}(L)$.

Als $L\colon V \to W$ van eindige rang $n$ is, dan kunnen we een basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ van $\mathcal{R}(L)$ kiezen. Voor elke $j = 1, \ldots, n$ definiëren we dan de lineaire afbeelding $\pi_j\colon \mathcal{R}(L) \to \mathbb{K}$ door $\pi_j(y_1e_1 + \cdots + y_ne_n) := y_j$. Voor elke $x \in V$ zijn er $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ zo dat

$$Lx = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n, \quad \text{dus} \quad \pi_j(Lx) = y_j, \quad \text{dus} \quad Lx = \sum_{j=1}^{n} \pi_j(Lx)\, e_j.$$

Dus er zijn lineaire functionalen $f_j := \pi_j \circ L$ op $V$ zo dat

$$Lx = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\, e_j \quad \text{voor alle } x \in V. \tag{5.8}$$

Omgekeerd, als $e_1, \ldots, e_n$ een stel vectoren in $W$ is en als $f_1, \ldots, f_n$ een stel linaire functionalen op $V$ is, dan definieert (5.8) een lineaire afbeelding $L\colon V \to W$ van eindige rang.

Neem nu aan dat $V$ en $W$ genormeerde vectorruimten zijn en dat $L\colon V \to W$ een BLO is van eindige rang. Dan is $\mathcal{R}(L)$ met de door $W$ geïnduceerde norm een eindig-dimensionale genormeerde vectorruimte, dus de lineaire functionalen $\pi_j$ op $\mathcal{R}(L)$ die hierboven met een basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ van $\mathcal{R}(L)$ geassocieerd werden, zijn begrensd, dus de lineaire functionalen $f_j := \pi_j \circ L$ op $V$ zijn dan begrensd. Dus dan kunnen we de BLO $L$ van eindige rang in de vorm (5.8) schrijven met $f_j \in V^*$ voor $j = 1, \ldots, n$.

Omgekeerd, als $e_1, \ldots, e_n$ een stel vectoren in de genormeerde vectorruimte $W$ is en als $f_1, \ldots, f_n$ een stel begrensde lineaire functionalen op de genormeerde vectorruimte $V$ is, dan definieert (5.8) een BLO $L\colon V \to W$ van eindige rang. We zien de begrensdheid door

$$\|Lx\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|\, \|x\|\, \|e_j\| = \|x\| \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|\, \|e_j\|.$$

Tenslotte, als $V$ een Hilbert-ruimte is en $W$ een genormeerde ruimte, en als $L\colon V \to W$ een BLO van eindige rang is, dan kunnen we $L$ in de vorm (5.8), maar dus ook in de vorm

$$Lx = \sum_{j=1}^{n} \langle x, f_j \rangle \, e_j \quad \text{voor alle } x \in V \tag{5.9}$$

schrijven, met $f_1, \ldots, f_n$ een stel vectoren in $V$. Omgekeerd, als $L$ gegeven is door (5.9) dan definieert (5.9) reeds een BLO $L\colon V \to W$ van eindige rang als $V$ een inproductruimte is, niet noodzakelijk een volledige inproductruimte.

**Voorbeeld 5.8.** Als $X$ een inproductruimte is met eindig-dimensionale lineaire deelruimte $V$ en als $P_V\colon X \to X$ de orthogonale projectie is van $X$ op $V$, dan is $P_V$ een BLO van eindige rang. Als dan $\{e_1, \ldots, e_n\}$ een orthonormale basis is van $V$, dan kunnen we schrijven

$$P_V(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \quad (x \in X),$$

wat van de vorm (5.9) is. In het bijzonder is de operator $\Phi$ in Voorbeeld 4.21, die we definieerden in verband met de reproducerende kern voor een eindig-dimensionale lineaire deelruimte van $C([a,b])$ met $L^2$-norm, een operator van deze vorm.

Als een BLO $L\colon V \to W$ van eindige rang is, dan is het beeld $L(B)$ van de gesloten eenheidsbal $B$ in $V$ een begrensde deelverzameling van de eindig-dimensionale (dus gesloten) lineaire deelruimte $\mathcal{R}(L)$ van de genormeerde vectorruimte $W$. Dus de afsluiting $\overline{L(B)}$ van $L(B)$ in $W$ ligt dan ook in $\mathcal{R}(L)$ en is een gesloten begrensde deelverzameling van $\mathcal{R}(L)$, dus is compact omdat $\mathcal{R}(L)$ eindig-dimensionaal is.

Als $L\colon V \to W$ een BLO is, maar niet noodzakelijk van eindige rang, dan is $\overline{L(B)}$ weliswaar een gesloten begrensde deelverzameling van $W$, maar hoeft geen compacte verzameling te zijn. Indien wel, dan noemen we $L$ compact.

**Definitie 5.9.** Een BLO $L\colon V \to W$ ($V$ en $W$ genormeerde vectorruimten) heet *compact* als $\overline{L(B)}$ ($B$ gesloten eenheidsbal in $V$) een compacte deelverzameling van $W$ is.
De verzameling van alle compacte operatoren van $V$ naar $W$ noteren we met $\mathcal{K}(V,W)$ en we schrijven $\mathcal{K}(V) := \mathcal{K}(V,V)$.

**Stelling 5.10.** *Zij $L \in \mathcal{B}(V,W)$ ($V$ en $W$ genormeerde vectorruimten). Dan is $L$ compact desda voor iedere begrensde rij $(x_n)$ in $V$ de rij $(Lx_n)$ in $W$ een convergente deelrij heeft.*

**Bewijs** Zonder verlies van algemeenheid mogen we in de formulering van de stelling aannemen dat de begrensde rij $(x_n)$ in de gesloten eenheidsbal $B$ van $V$ ligt. We moeten dus bewijzen dat $\overline{L(B)}$ compact is desda iedere rij $(y_n)$ in $L(B)$ een in $W$ convergente deelrij heeft.

Neem eerst aan dat $\overline{L(B)}$ compact is. Laat $(y_n)$ een rij in $L(B)$ zijn. Dan is $(y_n)$ ook een rij in de compacte metrische ruimte $\overline{L(B)}$, dus heeft daar een convergente deelrij.

Neem nu aan dat iedere rij in $L(B)$ een in $W$ (dus ook in $\overline{L(B)}$) convergente deelrij heeft. Omdat $\overline{L(B)}$ een metrische ruimte is, zal hij compact zijn als hij rij-compact is. Neem dus een rij $(z_n)$ in $\overline{L(B)}$. Dan is er een rij $(y_n)$ in $L(B)$ zo dat $\lim_{n\to\infty} \|z_n - y_n\| = 0$. De rij $(y_n)$ heeft een limietpunt $y$ in $\overline{L(B)}$. Dan is $y$ ook een limietpunt van de rij $(z_n)$. $\square$

We zeiden al dat iedere BLO van eindige rang compact is. Ook is iedere BLO $L\colon V \to W$ met $V$ eindig-dimensionaal een compacte operator (zie Vrst 5.9). Maar er bestaan zeker ook niet-compacte operatoren. Bijvoorbeeld is de identiteit op een genormeerde vectorruimte $V$ (duidelijk een BLO) compact desda $V$ eindig-dimensionaal is (zie Vrst 5.10).

**Voorbeeld 5.11.** (zie Vrst 5.11)
Definieer de BLO $L\colon l^2 \to l^2$ door $Lx := (a_1x_1, a_2x_2, \ldots)$ met $a \in l^\infty$. Dan is $L$ compact desda $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (d.w.z. $a \in c_0$).

De verzameling van compacte operatoren heeft mooie eigenschappen t.o.v. optelling en vermenigvuldiging:

**Propositie 5.12.** *Laten $V$ en $W$ genormeerde vectorruimten zijn. Dan is de verzameling $\mathcal{K}(V,W)$ van compacte operatoren $L\colon V \to W$ een lineaire deelruimte van $\mathcal{B}(V,W)$.*
*Verder geldt, met $V_0$, $W_0$ genormeerde vectorruimten en $A \in \mathcal{B}(V_0,V)$, $B \in \mathcal{B}(W,W_0)$: als $L\colon V \to W$ compact is dan zijn $LA\colon V_0 \to W$ en $BL\colon V \to W_0$ compact.*

**Bewijs** Zie Vrst 5.12. □

In het bijzonder is dus, voor $V_0 = V = W = W_0$, $\mathcal{K}(V)$ een tweezijdig ideaal in de ring $\mathcal{B}(V)$. Als $V = W = H$ ($H$ Hilbert-ruimte) dan is $\mathcal{K}(H)$ ook nog $*$-invariant (zie Vrst 5.13).

**Stelling 5.13.** *Zij $V$ een genormeerde vectorruimte en $W$ een Banachruimte. Dan is de lineaire deelruimte $\mathcal{K}(V,W)$ van de Banach-ruimte $\mathcal{B}(V,W)$ gesloten (dus zelf ook weer een Banachruimte).*

**Bewijs** We moeten bewijzen dat, als $(K_n)$ een rij compacte operatoren is en $\|K - K_n\| \to 0$ met $K$ een BLO, dan $K$ compact is. Laat $(x_j)$ een rij in $V$ zijn die in norm begrensd is door $C$. We kiezen een deelrij $(x_{1,i})$ zo dat de rij $(K_1x_{1,i})$ convergeert. Vervolgens kiezen we uit $(x_{1,i})$ een deelrij $(x_{2,i})$ zo dat $(K_2x_{2,i})$ convergeert. Met inductie gaan we verder en verkrijgen we voor $j = 1, 2, \ldots$ steeds fijnere deelrijen $(x_{j,i})_{i=1}^\infty$ met de eigenschap dat $(K_mx_{j,i})_{i=1}^\infty$ convergeert voor alle $m \le j$. Voor de diagonaalrij $(x_{j,j})$ geldt dan dat $(K_mx_{j,j})$ convergeert voor iedere $m$. Nu zien we met behulp van de driehoeksongelijkheid dat bij iedere $\varepsilon > 0$ voor voldoende grote $n$ geldt dat voor alle $j, k$:

$$\begin{aligned}\|Kx_{j,j} - Kx_{k,k}\| &\le \|(K - K_n)x_{j,j} + K_n(x_{j,j} - x_{k,k}) + (K_n - K)x_{k,k}\| \\ &\le 2\epsilon C + \|K_nx_{j,j} - K_nx_{k,k}\|.\end{aligned}$$

Kiezen we vervolgens $j, k$ voldoende groot dan zal ook de laatste term $\le \epsilon C$ worden. Dus $(x_{j,j})$ is een deelrij van $(x_j)$ waarvoor $(Kx_{j,j})$ een Cauchy-rij is, en dus (omdat $W$ volledig is) een convergente rij. □

**Gevolg 5.14.** *Laat $V$ een genormeerde vectorruimte zijn en $W$ een oneindig-dimensionale Hilbert-ruimte. Laat verder $\{e_1, e_2, \ldots\}$ een orthonormaal stelsel in $W$ zijn en $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ een (aftelbaar oneindig) stel vectoren in $V^*$. Veronderstel dat $\sum_{j=1}^\infty \|\phi_j\|^2 < \infty$. Definieer operatoren $L_n\colon V \to W$ en $L\colon V \to W$ door*

$$L_nx := \sum_{j=1}^n \phi_j(x)\, e_j \qquad (x \in V), \tag{5.10}$$

$$Lx := \sum_{j=1}^\infty \phi_j(x)\, e_j = \lim_{n\to\infty} L_nx \qquad (x \in V). \tag{5.11}$$

*Dan zijn de operatoren $L_n$ van eindige rang, de limiet in* (5.11) *bestaat voor elke $x \in V$, er geldt dat $\|L - L_n\| \to 0$ als $n \to \infty$, en $L$ is een compacte operator met $\|L\|^2 \le \sum_{j=1}^\infty \|\phi_j\|^2$.*

**Bewijs** Duidelijk is $L_n$ van eindige rang, dus compact. Voor $x \in V$ en $m > n$ geldt dat

$$\|L_m x - L_n x\|^2 = \Big\| \sum_{j=n+1}^m \phi_j(x)\, e_j \Big\|^2 \le \sum_{j=n+1}^m |\phi_j(x)|^2 \le \|x\|^2 \sum_{j=n+1}^m \|\phi_j\|^2,$$

dus $\|L_m - L_n\|^2 \le \sum_{j=n+1}^m \|\phi_j\|^2$. Dus $(L_n)$ is een Cauchy-rij in de Banach-ruimte $\mathcal{K}(V, W)$, die daar dus een limiet $L$ moet hebben, en waarvoor $Lx$ gegeven wordt door (5.11). Met een kleine variatie op bovenstaande afschattingen kan tenslotte ook de ongelijkheid voor $\|L\|^2$ worden bewezen. □

**Opmerking 5.15.** De conclusie in Gevolg 5.14 dat met behulp van (5.11) een compacte operator $L$ wordt gedefinieerd, blijft geldig als we de aanname dat de reeks $\sum_{j=1}^\infty \|\phi_j\|^2$ convergeert, vervangen door de zwakkere aanname dat er reële $\lambda_n \ge 0$ bestaan met $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ en $\sum_{j=n+1}^\infty |\phi_j(x)|^2 \le \lambda_n^2 \|x\|^2$ voor alle $n$ en $x$. Immers, het bewijs van Gevolg 5.14 blijft dan doorgaan.

**Gevolg 5.16.** *Zij $(a_{ij})$ een $\infty \times \infty$ matrix met $\sum_{i,j=1}^\infty |a_{ij}|^2 < \infty$. Dan is*

$$A \colon x \mapsto \big((Ax)_1, (Ax)_2, \ldots\big) \colon l^2 \to l^2 \quad \text{met} \quad (Ax)_j := \sum_{k=1}^\infty a_{jk} x_k$$

*een goed gedefinieerde compacte BLO. Verder is $\|A\|^2 \le \sum_{i,j=1}^\infty |a_{ij}|^2$.*

**Bewijs** We passen Gevolg 5.14 toe met $L := A$, $V = W := l^2$, met $\{e_1, e_2, \ldots\}$ de standaardbasis van $l^2$, en met $\phi_j(x) := \sum_{k=1}^\infty a_{jk}\, x_k$. Dan

$$|\phi_j(x)|^2 \le \Big(\sum_{k=1}^\infty |a_{jk}|^2\Big) \|x\|^2, \quad \text{dus} \quad \|\phi_j\|^2 \le \sum_{k=1}^\infty |a_{jk}|^2, \quad \text{dus} \quad \sum_{j=1}^\infty \|\phi_j\|^2 \le \sum_{j,k=1}^\infty |a_{jk}|^2 < \infty. \quad \square$$

Gevolg 5.16 generaliseert Voorbeeld 4.8 en is een analogon van Voorbeeld 4.12. Ook Opmerking 5.15 kunnen we op een interessante manier specialiseren.

**Gevolg 5.17.** *Laten $V$ en $W$ oneindig-dimensionale Hilbert-ruimten zijn. Laat verder $\{f_1, f_2, \ldots\}$ een orthonormaal stelsel in $V$ zijn en $\{e_1, e_2, \ldots\}$ een orthonormaal stelsel in $W$, en laat $(\lambda_n)$ een rij in $\mathbb{C}$ zijn die naar 0 convergeert. Dan definieert*

$$Lx := \sum_{j=1}^\infty \lambda_j \,\langle x, f_j\rangle\, e_j \qquad (x \in V) \tag{5.12}$$

*een compacte operator $L \colon V \to W$.*

**Bewijs** We passen Opmerking 5.15 toe met $\phi_j(x) := \lambda_j \langle x, f_j\rangle$. Merk op dat

$$\sum_{j=n+1}^\infty |\phi_j(x)|^2 \le \sup_{j>n} |\lambda_j| \Big(\sum_{j=n+1}^\infty |\langle x, f_j\rangle|^2\Big) \le \Big(\sup_{j>n} |\lambda_j|\Big) \|x\|^2 \to 0 \quad \text{als } n \to \infty. \quad \square$$

Voorbeeld 5.11 is een speciaal geval van Gevolg 5.17.

**Opmerking* 5.18.** Voor veel types genormeerde vectorruimten $V, W$ kan algemeen bewezen worden dat elke BLO $L\colon V \to W$ de gesloten eenheidsbal $B$ in $V$ afbeeldt op een gesloten deelverzameling $L(B)$ van $W$. Voor zulke ruimten geldt dus dat een BLO $L\colon V \to W$ compact is desda $L(B)$ compact is. Voorbeelden van zulke ruimten zijn: $V = W$ is een Hilbert-ruimte (zie Halmos [5, Corollary to Problem 130]), en algemener $V$ en $W$ Banach-ruimten met $V$ reflexief (gebruik Dunford & Schwartz [3, Vol. 1]). Maar voor $V := C([0,1]), W := \mathbb{C}$ zijn er eenvoudige tegenvoorbeelden te vinden.

**Opmerking* 5.19.** Als $V$ een Hilbert-ruimte is, dan geldt dat de ruimte van BLO's $L\colon V \to V$ van eindige rang dicht ligt in de ruimte van compacte operatoren van $V$ naar $V$ (zie Halmos [5, Problem 137]). Dit is echter niet waar voor elke Banach-ruimte V. Zie een tegenvoorbeeld in P. Enflo, *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math. 130 (1973), 309–317.

## Opgaven

**Vrst 5.1.** Bedenk een zinvolle uitbreiding van de definitie van geadjungeerde van $A \in \mathcal{B}(H)$ in Stelling 5.1 zo dat met $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ ($H_1, H_2$ Hilbert-ruimten) een BLO $A^*\colon H_2 \to H_1$ wordt geassocieerd.

**Vrst 5.2.** Bewijs Propositie 5.2.

**Vrst 5.3.** Bewijs (5.7). Bewijs ook dat een operator $A \in \mathcal{B}(H)$ ($H$ een Hilbert-ruimte) zelfgeadjungeerd is als $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ voor alle $x \in H$.

**Vrst 5.4.** Zij $H$ een Hilbert-ruimte. Laat zien dat elke BLO $A\colon H \to H$ op een en slechts een manier geschreven kan worden als $A = B + C$ met $B, C$ BLO's zo dat $B = B^*$ en $C = -C^*$.

**Vrst 5.5.** Geef het bewijs van Propositie 5.4.

**Vrst 5.6.** Zij $H$ een Hilbert-ruimte. Bewijs het volgende.

a) Als $A \in \mathcal{B}(H)$ dan is $A^*A$ zelfgeadjungeerd en positief-definiet.

b) Elke orthogonale projectie is positief-definiet.

c) Als $A \in \mathcal{B}(H)$ en $A = UZ$ met $Z$ zelfgeadjungeerd en $U$ unitair, dan is $A^*A = Z^2$.

**Vrst 5.7.** Bewijs de beweringen in Opmerking 5.6.

**Vrst 5.8.** Bewijs de beweringen in Voorbeeld 5.7.

**Vrst 5.9.** Laten $V$ en $W$ genormeerde vectorruimten zijn met $V$ eindig-dimensionaal of $W$ eindig-dimensionaal. Bewijs dat dan elke BLO $L\colon V \to W$ compact is.

**Vrst 5.10.** Bewijs dat de identiteit op een genormeerde vectorruimte $V$ (duidelijk een BLO) een compacte BLO is desda $V$ eindig-dimensionaal is.

**Vrst 5.11.** Bewijs de beweringen in Voorbeeld 5.11.

**Vrst 5.12.** Bewijs de beweringen in Propositie 5.12.

**Vrst 5.13.** Zij $H$ een Hilbert-ruimte en $L\colon H \to H$ een compacte BLO. Bewijs dat $L^*\colon H \to H$ compact is.
*Aanwijzing* Neem een begrensde rij $(x_n)$ in $H$ en herschrijf $\|L^*x_n - L^*x_m\|^2$.

# 6 Samenvatting van verdere theorie

## 6.1 Stellingen van Banach-Steinhaus, van de open afbeelding en van de gesloten grafiek

De drie stellingen die vermeld worden in de titel van deze paragraaf, zijn van zeer groot belang in de verdere theorie en de toepassingen van de functionaalanalyse. Vooral de Stelling van Banach-Steinhaus wordt op allerlei onverwachte manieren gebruikt. Ten grondslag aan deze stellingen ligt het topologische begrip van een verzameling van de eerste of tweede categorie.

**Definitie 6.1.** Zij $X$ een topologische ruimte.

1. Een deelverzameling $A$ van $X$ heet *nergens dicht* in $X$ als de afsluiting $\overline{A}$ van $A$ in $X$ een inwendige $(\overline{A})^0$ in $X$ heeft dat leeg is.
2. Een deelverzameling $E$ van $X$ heet een verzameling *van de eerste categorie* in $X$ als $E$ te schrijven is als een aftelbare vereniging van nergens dichte deelverzamelingen in $X$.
3. Een deelverzameling $E$ van $X$ heet een verzameling *van de tweede categorie* in $X$ als $E$ niet van de eerste categorie is in $X$, d.w.z. als $E$ niet te schrijven is als een aftelbare vereniging van nergens dichte deelverzamelingen in $X$.

**Voorbeeld 6.2.** $\mathbb{Q}$ is van de eerste categorie in $\mathbb{R}$. Ook is $\mathbb{Q}$ van de eerste categorie in zichzelf. Maar $\mathbb{Z}$ is van de eerste categorie in $\mathbb{R}$ en van de tweede categorie in zichzelf.

**Opmerking 6.3.** Merk op: een topologische ruimte $X$ is van de eerste categorie in zichzelf desda $X$ is te schrijven als een aftelbare vereniging van gesloten deelverzamelingen met leeg inwendige.

Dus voor een topologische ruimte $X$ zijn equivalent:

(i) $X$ is van de tweede categorie in zichzelf

(ii) $X$ is niet te schrijven als een aftelbare vereniging van gesloten deelverzamelingen met leeg inwendige.

(iii) Elke aftelbare doorsnede van open dichte deelverzamelingen van $X$ is niet-leeg.

**Stelling 6.4 (Stelling van Baire).**
*Zij $X$ een volledige metrische ruimte en $E$ een deelverzameling van $X$ van de eerste categorie. Dan heeft $E$ leeg inwendige. In het bijzonder kan $X$ niet van de eerste categorie in zichzelf zijn.*

**Bewijs*** Het algemene geval van de stelling volgt onmiddellijk uit het speciale geval dat in een volledige metrische ruimte $X$ een aftelbare vereniging van gesloten deelverzamelingen met leeg inwendige weer leeg inwendige heeft. Dit op zijn beurt is equivalent met de bewering dat in een volledige metrische ruimte $X$ een aftelbare doorsnede van open dichte deelverzamelingen $V_i$ weer dicht is. We bewijzen deze laatste bewering.

Zij $x \in X$ en $B_0$ een open bal om $X$. We moeten bewijzen dat $B_0$ niet-lege doorsnede heeft met $\cap_{i=1}^{\infty} V_i$. Omdat $V_1$ dicht is in $X$, is er een $y_1$ in de open verzameling $V_1 \cap B_0$. Dan is er een open bal $B_1$ om $y_1$ van straal hoogstens 1 met $\overline{B_1} \subset V_1 \cap B_0$. We kiezen nu recursief een collectie open ballen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ in $X$ zo dat $\overline{B_k} \subset V_k \cap B_{k-1}$ en de straal van $B_k$ hoogstens $k^{-1}$ is voor $k = 1, \ldots, n$. Dit is mogelijk, want als we al zo'n collectie open ballen $B_1, \ldots, B_{n-1}$ hebben, dan kunnen we $B_1, \ldots, B_{n-1}$ behouden en vervolgens, omdat $V_n$ dicht is in $X$, een $y_n$ kiezen in de open verzameling $V_n \cap B_{n-1}$ en een open bal $B_n$ om $y_n$ kiezen met $\overline{B_n} \subset V_n \cap B_{n-1}$ en met straal hoogstens $n^{-1}$. Zo zien we met inductie dat we een aftelbare verzameling open ballen $B_n$ hebben zo dat $\overline{B_k} \subset V_k \cap B_{k-1}$ voor alle $k$, dus i.h.b. is $B_m$ bevat in $B_n$ als $m > n$. De middelpunten $y_n$ van de ballen $B_n$ vormen dus een Cauchy-rij die in de volledige metrische ruimte $X$ een limiet $y_0$ zal hebben. Dan geldt voor elke $n$ dat $y_0 \in \overline{B_n} \subset V_n \cap B_{n-1} \subset V_n \cap B_0$. Dus $B_0$ heeft niet-lege doorsnede met $\cap_{i=1}^{\infty} V_i$. $\square$

**Gevolg 6.5.** *Elke Banach-ruimte is van de tweede categorie in zichzelf.*

**Voorbeeld 6.6.** Dus bijv. $\mathbb{R}$ (een Banach-ruimte) is van de tweede categorie in zichzelf. Maar de lineaire deelruimte $V$ van $l^2$ bestaande uit alle rijtjes $x = (x_1, x_2, \dots)$ met $x_i \neq 0$ voor slechts eindig veel $i$ is van de eerste categorie in zichzelf (zie Vrst 6.4). Merk op dat $V$ geen volledige ruimte is.

Met behulp van Gevolg 6.5 kan de Stelling van Banach-Steinhaus bewezen worden.

**Stelling 6.7. (Stelling van Banach-Steinhaus; Principe van Uniforme Begrensdheid)** *Laten $X$ en $Y$ genormeerde vectorruimten zijn, $X$ bovendien volledig. Laat $\mathcal{L}$ een collectie BLO's van $X$ naar $Y$ zijn. Dan geldt: Als voor iedere $x \in X$ de verzameling $\{Lx : L \in \mathcal{L}\}$ begrensd is in $Y$, dan is $\mathcal{L}$ een begrensde deelverzameling van $\mathcal{B}(X,Y)$. Of anders gezegd: Als voor iedere $x \in X$ de verzameling $\{Lx : L \in \mathcal{L}\}$ begrensd is in $Y$, dan is de verzameling $\{Lx : L \in \mathcal{L}, \|x\| \leq 1\}$ begrensd in $Y$.*

**Gevolg 6.8.** *Laten $X$ en $Y$ genormeerde vectorruimten zijn, $X$ bovendien volledig. Zij $(L_n)$ een rij in $\mathcal{B}(V,W)$ zo dat voor elke $x \in V$ de rij $(L_n x)$ in $W$ convergeert naar een limiet $Lx$. Dan is $L\colon V \to W$ een BLO.*

**Bewijs** Je bewijst onmiddellijk dat $L\colon V \to W$ lineair is. Omdat voor $x \in V$ de rij $(L_n x)$ convergent is, is de verzameling $\{L_n x\}_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ begrensd in $W$. Dus er volgt uit Stelling 6.7 dat de verzameling $\{L_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ begrensd is. Dus er is een $C > 0$ zo dat $\|L_n x\| \leq C$ voor alle $n$ en voor alle $x \in V$ met $\|x\| \leq 1$. Dus voor elke $x \in V$ met $\|x\| \leq 1$ is $\|Lx\| = \lim_{n\to\infty} \|L_n x\| \leq C$. Dus $\|L\| \leq C$. $\square$

**Voorbeeld 6.9.** (zie Vrst 6.6)
Zij $(x_n)$ een rij in $\mathbb{C}$. Als voor iedere $y \in l^2$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ convergeert, dan $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, dus dan $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^2$.

**Voorbeeld 6.10.** Laten weer $X$ en $Y$ genormeerde vectorruimten zijn, $X$ bovendien volledig, maar laat $(L_n)$ nu een onbegrensde rij in $\mathcal{B}(V,W)$ zijn. Er volgt dan uit Stelling 6.7 dat er een $x \in V$ moet zijn zo dat de rij $(L_n x)$ niet begrensd, dus zeker niet convergent is in $W$. Dit gebruiken we om op een abstracte, niet-constructieve manier te bewijzen dat er voor elke $t \in \mathbb{R}$ een $2\pi$-periodieke continue functie $f$ op $\mathbb{R}$ moet bestaan waarvan de partiële Fourier-sommen $S_N(f)(t)$ niet convergeren naar $f(t)$ als $N \to \infty$. Dit gaat als volgt.

Zonder verlies van algemeenheid kunnen we $t = 0$ nemen. Dan

$$L_N(f) := S_N(f)(0) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_N(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\, dt.$$

Zij $C_{2\pi}$ de Banach-ruimte van $2\pi$-periodieke continue functies op $\mathbb{R}$ met de sup-norm. Dan zijn de hierboven gedefinieerde afbeeldingen $L_N$ lineaire functionalen op $C_{2\pi}$. Zij zijn ook begrensd en

$$\|L_N\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)|\, dt \tag{6.1}$$

(zie Vrst 6.7). Verder kan bewezen worden (zie Vrst 6.8) dat er een $C > 0$ is zo dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| \, dt \geq C \log N. \tag{6.2}$$

Dus $(L_N)$ is een onbegrensde rij in $(C_{2\pi})^*$. Dus er moet een $f \in C_{2\pi}$ zijn zo dat de rij $(L_N(f))$ niet convergeert. $\square$

Het is ook mogelijk om een constructief bewijs van bovenstaande bewering te geven, door een expliciet voorbeeld van een continue $2\pi$-periodieke functie waarvan de Fourier-reeks in een punt divergeert. Zie bijv. Stein & Shakarchi [10].

Met behulp van Gevolg 6.5 kan ook de zogenaamde stelling van de open afbeelding bewezen worden. Van het vak Topologie zal bekend zijn dat een afbeelding $f\colon X \to Y$ ($X, Y$ topologische ruimten) *open* genoemd wordt als voor elke open deelverzameling $E$ van $X$ het beeld $f(E)$ een open deelverzameling van $Y$ is. Merk op dat voor een bijectieve afbeelding $f\colon X \to Y$ geldt: $f$ is een open afbeelding desda $f^{-1}\colon Y \to X$ continu is.

**Stelling 6.11. (Stelling van de open afbeelding)**
*Laten $X$ en $Y$ Banach-ruimten zijn. Als $L\colon X \to Y$ een surjectieve BLO is, dan is $L$ een open afbeelding. Als $L$ bovendien injectief is (dus een bijectieve BLO) dan is $L^{-1}\colon Y \to X$ ook een BLO, dus $L$ is een homeomorfisme.*

**Voorbeeld 6.12.** Zij $X$ een lineaire ruimte voorzien van twee normen $\|\,.\,\|$ en $\|\,.\,\|'$. We zeggen dat de norm $\|\,.\,\|'$ *sterker* is dan de norm $\|\,.\,\|$ als er een $C > 0$ is zo dat $\|x\| \leq C\|x\|'$ voor alle $x \in X$. We noemen de normen $\|\,.\,\|$ en $\|\,.\,\|'$ *equivalent* (zie ook Definitie 2.9) als $\|\,.\,\|$ sterker is dan $\|\,.\,\|'$ en $\|\,.\,\|'$ sterker is dan $\|\,.\,\|$.

Nu volgt er uit Stelling 6.11 het volgende (zie Vrst 6.9):
Zij $X$ een vectorruimte voorzien van twee normen $\|\,.\,\|$ en $\|\,.\,\|'$ zo dat $X$ t.o.v. beide normen een Banach-ruimte is. Als de norm $\|\,.\,\|'$ *sterker* is dan de norm $\|\,.\,\|$ dan zijn die twee normen equivalent.

Een voorbeeld van deze situatie is een Banach-ruimte $X$ met twee gesloten lineaire deelruimten $Y$ en $Z$ zo dat $X$ de *directe som* is van $Y$ en $Z$, d.w.z. dat elke $x \in X$ op een unieke manier te schrijven is als $x = y + z$ voor zekere $y \in Y$, $z \in Z$. Als $X$ een Hilbert-ruimte is en als $X$ de orthogonale directe som is van gesloten lineaire deelruimten $Y$ en $Z$ (zie Definitie 3.16), dan is $\|y + z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$ ($y \in Y$, $z \in Z$) en van de norm $\|\,.\,\|$ op $X$ zien we eenvoudig in dat hij equivalent is met de norm $\|\,.\,\|'$ gedefinieerd door

$$\|y + z\|' := \|y\| + \|z\| \qquad (y \in Y,\ z \in Z). \tag{6.3}$$

In het algemenere geval dat $X$ een Banach-ruimte is zien we eenvoudig dat (6.3) een norm definieert op $X$ ten opzichte waarvan $X$ een Banach-ruimte wordt, en dat de norm $\|\,.\,\|'$ sterker is dan de norm $\|\,.\,\|$. Met bovenstaand gevolg van Stelling 6.11 concluderen we ook hier dat beide normen equivalent zijn, maar hier is het dus een dieper resultaat dan in het geval van een Hilbert-ruimte. Vervolgens kunnen we concluderen dat de *projectie* $P\colon y + z \mapsto y\colon X \to Y$ continu is, immers $\|y\| \leq \|y\| + \|z\| = \|y + z\|'$ ($y \in Y$, $z \in Z$), dus er is een $C > 0$ zo dat $\|y\| \leq C\|y + z\|$ ($y \in Y$, $z \in Z$).

Omgekeerd als $X$ een Banach-ruimte is en $P\colon X \to X$ een BLO is en tevens een *projectie*, d.w.z. een lineaire afbeelding zo dat $P^2 = P$, dan is het eenvoudig te bewijzen dat $X$ de directe som is van de gesloten lineaire deelruimten $Y := \mathcal{R}(P)$ en $Z := \mathcal{N}(P)$. Dus voor een gesloten lineaire deelruimte $Y$ van een Banach-ruimte $X$ geldt dat er een begrensde projectie van $X$ op $Y$ bestaat desda er een aan $Y$ *complementaire* gesloten lineaire deelruimte $Z$ bestaat, d.w.z. een gesloten lineaire deelruimte $Z$ van $X$ zo dat $X$ de directe som is van $Y$ en $Z$. Het bestaan van zulke complementaire deelruimten is echter niet verzekerd. Bijv. in het artikel

W. T. Gowers & B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc. 6 (1993), 851–874.

wordt o.a. bewezen dat er een oneindig-dimensionale Banach-ruimte bestaat die niet de directe som is van twee oneindig-dimensionale gesloten lineaire deelruimten.

Een belangrijk gevolg van de stelling van de open afbeelding is de zogenaamde stelling van de gesloten grafiek. Als $X, Y$ verzamelingen zijn en $f : X \to Y$ een afbeelding dan heet de deelverzameling $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in X\}$ van $X \times Y$ de *grafiek* van $f$. Als $X$ en $Y$ vectorruimten zijn en $f$ is lineair, dan is $\Gamma_f$ een lineaire deelruimte van de vectorruimte $X \times Y$. Als $X$ en $Y$ topologische ruimten zijn dan wordt $X \times Y$ een topologische ruimte met de producttopologie. Als $X$ en $Y$ genormeerde vectorruimten zijn dan maken we $X \times Y$ tot een genormeerde vectorruimte met de norm $\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|$. Deze norm is compatibel met de producttopologie (evenals vele andere normen). Als $X$ en $Y$ bovendien volledig zijn dan is $X \times Y$ ook volledig.

**Stelling 6.13. (Stelling van de gesloten grafiek)**
*Laten $X$ en $Y$ Banach-ruimten zijn en zij $L : X \to Y$ lineair. Als de grafiek $\Gamma_L := \{(x, Lx) : x \in X\}$ van $L$ gesloten is in $X \times Y$ dan is $L$ een BLO.*

**Bewijs** $\Gamma_L$ is een gesloten lineaire deelruimte van $X \times Y$, dus is zelf een Banach-ruimte. Bekijk nu de projecties $\pi_1 : (x, y) \mapsto x : X \times Y \to X$ en $\pi_2 : (x, y) \mapsto y : X \times Y \to Y$. Dit zijn BLO's. Nu is $\pi_1\big|_{\Gamma_L}$ (dit is $\pi_1$ beperkt tot $\Gamma_L$) een bijectieve BLO van de Banach-ruimte $\Gamma_L$ op de Banach-ruimte $X$. Dus wegens Stelling 6.11 is $(\pi_1\big|_{\Gamma_L})^{-1} : x \mapsto (x, Lx) : X \to \Gamma_L$ een BLO. Dus $\pi = \pi_2 \circ (\pi_1\big|_{\Gamma_L})^{-1} : x \mapsto (x, Lx) \mapsto Lx : X \to \Gamma_L \to Y$ is, als samenstelling van twee BLO's, zelf een BLO. $\square$

**Opmerking 6.14.** We winnen er echt iets mee door voor een gegeven lineaire $L : X \to Y$ ($X$ en $Y$ Banach-ruimten) te proberen te bewijzen dat $\Gamma_L$ gesloten is en daaruit te concluderen dat $L$ continu is, in plaats van direct te proberen te bewijzen dat $L$ continu is. Immers, bewijzen dat $\Gamma_L$ gesloten is komt neer op bewijzen van het volgende:

Voor elke rij $(x_n)$ in $X$ met de eigenschap dat $x_n \to x$ en $Lx_n \to y$ voor zekere $x \in X$, $y \in Y$ geldt dat $y = Lx$.

Maar bewijzen dat $L$ continu is komt neer op bewijzen van het volgende:

Voor elke rij $(x_n)$ in $X$ met de eigenschap dat $x_n \to x$ voor zekere $x \in X$ geldt dat $Lx_n \to y$ voor zekere $y \in Y$ en $y = Lx$.

Dus dit is meer werk.

**Voorbeeld 6.15.** (zie Vrst 6.10)
Laten $T$ en $S$ lineaire afbeeldingen zijn van $H$ naar $H$ ($H$ een Hilbert-ruimte).
Als $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$ voor alle $x, y \in H$ dan is $T$ begrensd.

## 6.2 De stelling van Hahn-Banach

**Voorbeeld 6.16.** Zij eerst $X$ een Hilbert-ruimte met een gesloten lineaire deelruimte $Y$. Zij $f\colon Y \to \mathbb{K}$ een begrensde lineaire functionaal op $Y$. Dan volgt er eenvoudig met behulp van Stelling 4.19 dat $f$ een uitbreiding heeft tot een begrensde lineaire functionaal $\phi\colon X \to \mathbb{K}$ op $X$ (zie Vrst 6.11) en zo dat bovendien $\|\phi\| = \|f\|$.

Als algemener $X$ een Banach-ruimte is zo dat $X$ de directe som is van twee gesloten lineaire deelruimten $Y$ en $Z$ van $X$, dan zien we met de resultaten van Voorbeeld 6.12 dat een begrensde lineaire functionaal $f\colon Y \to \mathbb{K}$ uitgebreid kan worden tot een begrensde lineaire functionaal $\phi\colon X \to \mathbb{K}$ door de samenstelling $\phi\colon y + z \mapsto y \mapsto f(y)\colon X \to Y \to \mathbb{K}$ (maar $\|\phi\| \geq \|f\|$ en niet noodzakelijk $\|\phi\| = \|f\|$) (zie een voorbeeld in Vrst 6.12). Deze methode lukt niet als alleen $Y$ als gesloten lineaire deelruimte van een Banach-ruimte $X$ gegeven is zonder een complementaire gesloten lineaire deelruimte $Z$ (zie Voorbeeld 6.12). Er is echter een andere methode die, ook in veel algemenere situaties, de gewenste continue uitbreiding van $f$ tot $\phi$ geeft, bovendien norm behoudend.

**Stelling 6.17. (Stelling van Hahn-Banach)**
*Laat $X$ een genormeerde vectorruimte zijn en $Y \subset X$ een lineaire deelruimte. Zij $f$ een continue lineaire functionaal op $Y$. Dan kan $f$ worden uitgebreid tot een continue lineaire functionaal $\phi$ op $X$ met $\|\phi\| = \|f\|$.*

De volgende resultaten zijn eenvoudige gevolgen van de stelling van Hahn-Banach. Ze zijn van groot praktisch nut.

**Propositie 6.18.** *Als $X$ een genormeerde vectorruimte is en $0 \neq x_0 \in X$ dan is er een begrensde lineaire functionaal $\phi$ op $X$ zo dat $\phi(x_0) = \|x_0\|$ en $\|\phi\| = 1$.*

**Bewijs** Zij $Y := \mathbb{K}x_0$ en $f(\alpha x_0) := \alpha\|x_0\|$. Dan is $f$ een lineaire functionaal op $Y$ met $f(x_0) = \|x_0\|$ en $\|f\| = 1$. Neem een uitbreiding $\phi$ van $f$ tot een begrensde lineaire functionaal op $X$ volgens Stelling 6.17. Dan voldoet $\phi$ aan de vereiste eigenschappen. $\square$

**Gevolg 6.19.** *De begrensde lineaire functionalen op een genormeerde vectorruimte $X$ separeren de punten van $X$, d.w.z., als $x, y \in X$ en $x \neq y$, dan is er een begrensde lineaire functionaal $\phi$ op $X$ met $\phi(x) \neq \phi(y)$.*

**Bewijs** Neem $x_0 := x - y \neq 0$ en $\phi$ als in Propositie 6.18. $\square$

Voor een volgende toepassing van Hahn-Banach maken we gebruik van quotiëntruimten van genormeerde vectorruimten. Daarover eerst een hulpstelling (bewijs in Vrst 6.13).

**Propositie 6.20.** *Zij $Y$ een gesloten lineaire deelruimte van een genormeerde vectorruimte $X$. Beschouw de quotiëntruimte $X/Y$ bestaande uit de nevenklassen $x + Y$ $(x \in X)$ op de gebruikelijke manier als een vectorruimte. Dan geldt:*

*a) $X/Y$ wordt een genormeerde vectorruimte met norm $\|x + Y\| := \inf\{\|x + y\| : \ y \in Y\}$.*

*b) Zij $T\colon X \to X/Y$ de natuurlijke afbeelding die $x$ stuurt naar $x+Y$. Dan is $T$ een begrensde lineaire afbeelding met $\|T\| \leq 1$.*

*c) Als $X$ bovendien een Banach-ruimte is, dan is $X/Y$ een Banach-ruimte.*

**Gevolg 6.21.** *Zij $Y$ een gesloten lineaire deelruimte van een genormeerde vectorruimte $X$ en zij $x_0 \in X \backslash Y$. Dan is er een begrensde lineaire functionaal $\phi$ op $X$ die identiek 0 is op $Y$ en met $\phi(x_0) \neq 0$.*

**Bewijs** Gebruik Propositie 6.18 om een begrensde lineaire functionaal $f$ op $X/Y$ te vinden zo dat $f(x_0 + Y) \neq 0$. Zij $T \colon X \to X/Y$ de natuurlijke afbeelding, die volgens Propositie 6.20(b) begrensd is. Dan voldoet $\phi := f \circ T$ aan de eisen. □

## 6.3 Dualiteit

Zij $X$ een genormeerde vectorruimte. In Definitie 4.6 definieerden we de duale $X^* := \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ van $X$, wat een Banach-ruimte is. De *biduale* $X^{**} = (X^*)^*$ van $X$ is de duale ruimte van de duale ruimte $X^*$ van $X$. Dus $X^{**}$ is weer een Banach-ruimte.

Iedere $x \in X$ kan worden opgevat als een begrensde lineaire functionaal $F_x$ op $X^*$:

$$F_x(f) := f(x) \qquad (x \in X,\ f \in X^*). \tag{6.4}$$

Er geldt $|F_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\| \, \|f\|$, dus $F_x \in X^{**}$ met $\|F_x\| \leq \|x\|$. Vanwege Propositie 6.18 is er een $f \in X^*$ met $\|f\| = 1$ zo dat $|F_x(f)| = |f(x)| = \|x\|$, dus $\|F_x\| = \|x\|$. De afbeelding $x \mapsto F_x$ is ook duidelijk lineair. Dus we hebben bewezen:

**Stelling 6.22.** *Zij $X$ een genormeerde vectorruimte. Dan is de afbeelding $x \mapsto F_x : X \to X^{**}$ een norm behoudende (dus injectieve en continue) lineaire afbeelding van $X$ in $X^{**}$.*

**Definitie 6.23.** Een genormeerde vectorruimte $X$ heet *reflexief* als de afbeelding $x \mapsto F_x : X \to X^{**}$ surjectief is. Dan is $X$ noodzakelijkerwijs een Banach-ruimte en de afbeelding $x \mapsto F_x$ is een isomorfisme van Banach-ruimten.

Als $H$ een Hilbert-ruimte is en $\phi_y(x) := \langle x, y \rangle$, dan $F_x(\phi_y) = \phi_y(x) = \langle x, y \rangle = \langle \phi_y, \phi_x \rangle = \phi_{\phi_x}(\phi_y)$. De afbeelding $x \mapsto F_x$ is dan een isomorfisme van Hilbert-ruimten en $H$ is reflexief.

Verdere voorbeelden van al of niet reflexieve Banach-ruimten worden door de $L^p$-ruimten geleverd, die bij Integratietheorie aan de orde zijn gekomen (zie ook Rudin [7]). We vatten de hoofdzaken betreffende deze ruimten hieronder samen.

**Definitie 6.24.** Zij $\mu$ een positieve maat op een $\sigma$-algebra $\mathcal{B}$ van deelverzamelingen van een verzameling $S$. Noem twee $\mu$-meetbare functies op $S$ *equivalent* als ze hoogstens op een verzameling van $\mu$-maat 0 verschillende waarden aannemen.
De ruimte $L^p(S; \mu)$, $(1 \leq p < \infty)$ bestaat uit de equivalentieklassen van $\mu$-meetbare functies $f$ op $S$ met de eigenschap dat $|f|^p$ $\mu$-integreerbaar is.
De ruimte $L^\infty(S; \mu)$ bestaat uit de equivalentieklassen van $\mu$-meetbare functies op $S$ die *essentieel $(\mu)$-begrensd* zijn, d.w.z. dat de equivalentieklasse een begrensde functie bevat.
Voor het gemak schrijven we $f \in L^p(S; \mu)$ als we bedoelen dat de equivalentieklasse van de functie $f$ tot $L^p(S; \mu)$ behoort. Verder noteren we:

$$\|f\|_p := \Big( \int_S |f(s)|^p \, d\mu(s) \Big)^{1/p} \qquad (f \in L^p(S; \mu),\ 1 \leq p < \infty), \tag{6.5}$$

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess.sup} |f| = \inf \Big\{ t \in \mathbb{R}_{\geq 0} :\ \mu\big(\{ s \in S :\ |f(s)| > t \}\big) = 0 \Big\} \quad (f \in L^\infty(S; \mu)), \tag{6.6}$$

$$\langle f, g \rangle := \int_S f(s) \, \overline{g(s)} \, d\mu(s) \qquad (f, g \in L^2(S; \mu)). \tag{6.7}$$

Voor de gevallen $p = 1, 2, \infty$ kan nu direct ingezien worden dat $L^p(S, \mu)$ een genormeerde vectorruimte wordt met norm gegeven door (6.5) of (6.6), en dat $L^2(S, \mu)$ tevens een inproductruimte wordt met inproduct (6.7). Bij Integratietheorie is verder aangetoond dat deze ruimten volledig zijn, dus Banach-ruimten zijn, terwijl $L^2(S, \mu)$ ook een Hilbert-ruimte is. Voor algemenere $p$ wordt een belangrijk gereedschap geleverd door de volgende twee ongelijkheden (zie voor bewijs Rudin [7]).

**Ongelijkheid van Hölder**

$$\int_S |f(s)\, g(s)|\, d\mu(s) \le \|f\|_p\, \|g\|_q$$
$$(p, q \in (1, \infty),\ p^{-1} + q^{-1} = 1,\ f \in L^p(S;\mu),\ g \in L^q(S;\mu)). \tag{6.8}$$

**Ongelijkheid van Minkowski**

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \qquad (p \in [1, \infty),\ f, g \in L^p(S;\mu)). \tag{6.9}$$

Merk op dat ongelijkheid (6.8) ook geldig is als $p = 1$, $q = \infty$ of $p = \infty$, $q = 1$, en dat ongelijkheid (6.9) ook geldig is als $p = \infty$. Maar de bewijzen zijn in die gevallen anders en eenvoudiger.

Nu volgt er uit (6.9) dat $L^p(S;\mu)$ een genormeerde vectorruimte is voor $1 \le p < \infty$, en ook hiervoor kan weer bewezen worden dat het een Banach-ruimte is. Verder volgt er voor $1 \le p \le \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ uit (6.8) dat elke $g \in L^q(S;\mu)$ een begrensde lineaire functionaal $\phi_g$ op $L^p(S;\mu)$ levert:

$$\phi_g(f) := \int_S f(s)\, g(s)\, d\mu(s) \qquad (f \in L^p(S;\mu)). \tag{6.10}$$

In feite geldt:

**Stelling 6.25.** *Zij $1 \le p < \infty$ en $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Dan is de afbeelding $g \mapsto \phi_g \colon L^q(S;\mu) \to (L^p(S;\mu))^*$ een isomorfisme van Banach-ruimten (norm behoudend). In het bijzonder is de Banach-ruimte $L^p(S;\mu)$ reflexief als $1 < p < \infty$.*
*De afbeelding $g \mapsto \phi_g \colon L^1(S;\mu) \to (L^\infty(S;\mu))^* \simeq (L^1(S;\mu))^{**}$ is norm behoudend maar niet noodzakelijk surjectief. Dus de Banach-ruimte $L^1(S;\mu)$ is niet noodzakelijk reflexief (zie Vrst 6.14).*

Het is een interessante oefening (zie Vrst 6.15) om te bewijzen:

**Propositie 6.26.** *Zij $X$ een Banach-ruimte. Dan geldt: $X$ is reflexief desda $X^*$ is reflexief.*

Een gevolg is dat, als $L^1(X;\mu)$ niet reflexief is, dan ook $L^\infty(X;\mu)$ niet reflexief is.
Merk op dat al het bovenstaande over de ruimten $L^p(X;\mu)$ in het bijzonder geldt voor de rijtjesruimten $l^p := L^p(\mathbb{Z}_{>0}; \mathrm{card})$ waarbij card de telmaat is (zie Voorbeeld 2.22). De resultaten over volledigheid en dualiteit zijn voor $l^p$ ook direct, en veel gemakkelijker, te bewijzen. Het analogon van formule (6.10) is hier

$$\phi_y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n\, y_n \qquad (x \in l^p,\ y \in l^q,\ p^{-1} + q^{-1} = 1). \tag{6.11}$$

Dan $y \mapsto \phi_y \colon l^q \to (l^p)^*$. Interessant is nog het volgende resultaat (zie Vrst 6.16) over de duale van $c_0$ (zie Voorbeeld 2.24).

**Propositie 6.27.** *De afbeelding $y \mapsto \phi_y \colon l^1 \to (c_0)^*$ is een isomorfisme van Banach-ruimten. Dus $l^1 \simeq (c_0)^*$ en $l^\infty \simeq (c_0)^{**}$.*

## 6.4 Spectraaltheorie

In deze paragraaf nemen we $\mathbb{K} := \mathbb{C}$ en we zullen ook aannemen dat onze genormeerde vectorruimten volledig zijn. Zij $V$ een eindig-dimensionale vectorruimte (dus over $\mathbb{C}$) en zij $L\colon V \to V$ een lineaire afbeelding. Dan weten we uit de lineaire algebra (en op grond van de fundamentaalstelling van de algebra) dat $L$ minstens één eigenwaarde en bijbehorende eigenvector heeft, dus $\lambda \in \mathbb{C}$ en $0 \neq v \in V$ met $Lv = \lambda v$. Merk ook op dat $\lambda$ een eigenwaarde van $L$ is desda $\mathcal{N}(L - \lambda I) \neq \{0\}$ desda de lineaire afbeelding $L - \lambda I\colon V \to V$ niet inverteerbaar is.

Zij nu $V$ een Banach-ruimte (over $\mathbb{C}$) en $L\colon V \to V$ een BLO. Dan kunnen we de definitie van eigenwaarde en eigenvector aanhouden zoals die in het eindig-dimensionale geval is. Nu is het echter mogelijk dat $L$ geen eigenwaarden heeft. Zie bijv. de rechter-shiftoperator $L_r\colon l^2 \to l^2$ (Voorbeeld 4.10). Met de definitie van de inverse van $L$ moeten we zorgvuldiger zijn dan in het eindig-dimensionale geval. In de eerste plaats willen we een *tweezijdig* invers van $L$ hebben: een lineaire afbeelding $M\colon V \to V$ zo dat $LM = I = ML$. Als $V$ eindig-dimensionaal is, dan is een links invers ook een rechts invers en omgekeerd, maar niet noodzakelijk als $V$ oneindig-dimensionaal is. Bijv. geldt voor de rechter- en linker-shiftoperatoren $L_l$ en $L_r$ dat $L_l$ een links invers is van $L_r$ maar geen rechts invers. Verder eisen we dat de tweezijdige invers $L^{-1}$ wederom een BLO is. Maar dit laatste volgt al automatisch met behulp van Stelling 6.11 (van de open afbeelding).

**Definitie 6.28.** Zij $V$ een Banach-ruimte en $L\colon V \to V$ een BLO. Het *spectrum* van $L$ (notatie $\sigma(L)$) bestaat uit alle $\lambda \in \mathbb{C}$ zo dat aan een van de volgende equivalente voorwaarden voldaan is:

(i) $L - \lambda I$ heeft niet een begrensd tweezijdig invers.

(ii) $L - \lambda I$ is niet inverteerbaar.

(iii) $\mathcal{N}(L - \lambda I) \neq \{0\}$ of $\mathcal{R}(L - \lambda I) \neq V$.

Merk op dat $\lambda$ een eigenwaarde is van een BLO $L\colon V \to V$ desda $\mathcal{N}(L - \lambda I) \neq \{0\}$, dus eigenwaarden zitten zeker in het spectrum. Maar eigenwaarden hoeven niet het hele spectrum te vullen.

**Voorbeeld 6.29.** 0 zit in het spectrum van de rechter-shiftoperator $L_r$, omdat $\mathcal{R}(L_r) \neq l^2$, maar 0 is geen eigenwaarde van $L_r$ omdat $\mathcal{N}(L_r) = \{0\}$. Voor de linker-shiftoperator $L_l$ geldt juist $\mathcal{N}(L_l) \neq \{0\}$ en $\mathcal{R}(L_l) = l^2$, dus 0 is een eigenwaarde van $L_l$ en zit in het spectrum van $L_l$.

Zonder bewijs geven we hier de hoofdresultaten over het spectrum van een operator.

**Stelling 6.30.** *Zij $V$ een Banach-ruimte en $L\colon V \to V$ een BLO. Dan is het spectrum $\sigma(L)$ van $L$ een niet-lege gesloten begrensde deelverzameling van $\mathbb{C}$. Verder is $\sigma(L)$ bevat in de gesloten cirkelschijf om 0 met straal $\|L\|$.*
*Noem de* **spectraalradius** *$r(L)$ de kleinste $r \geq 0$ zo dat $\sigma(L)$ bevat is in de gesloten cirkelschijf om 0 met straal $r$. Dan*

$$r(L) = \lim_{n\to\infty} \|L^n\|^{1/n} \leq \|L\|, \tag{6.12}$$

*waarbij de limiet altijd bestaat.*

**Voorbeeld 6.31.** (zie Vrst 6.17)
De rechter-shiftoperator $L_r\colon l^2 \to l^2$ heeft norm 1, spectrum gelijk aan de gesloten eenheidsschijf,

spectraalradius 1, en geen eigenwaarden.
De linker-shiftoperator $L_l\colon l^2 \to l^2$ heeft norm 1, spectrum gelijk aan de gesloten eenheidsschijf, spectraalradius 1, en als collectie eigenwaarden de open eenheidsschijf.
De operatoren $L_r$ en $L_l$ zijn elkaars geadjungeerden. Er geldt: $\lambda \in \sigma(L_r) \iff \overline{\lambda} \in \sigma(L_l)$.
Maar er geldt niet: $\lambda$ is eigenwaarde van $L_r \iff \overline{\lambda}$ is eigenwaarde van $L_l$.
Voor een BLO $A$ op een Hilbert-ruimte $H$ geldt algemeen: $\lambda \in \sigma(A) \iff \overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$. Maar een soortgelijke equivalentie voor de eigenwaarden van $A$ en $A^*$ geldt dus niet algemeen (wel als $H$ eindig-dimensionaal is).

Voor spectrum en eigenwaarden van compacte operatoren op een Banach-ruimte, en vooral voor zelfgeadjungeerde compacte operatoren op een Hilbert-ruimte kunnen zeer fraaie stellingen bewezen worden.

**Stelling 6.32.** *Zij $L$ een compacte operator op een Banach-ruimte $V$. Dan is $\sigma(L)$ aftelbaar, en het enig mogelijke limietpunt van $\sigma(L)$ is 0. Elke $\lambda \neq 0$ in $\sigma(L)$ is een eigenwaarde van $L$ en de multipliciteit van die eigenwaarde is eindig (d.w.z. dat $\mathcal{N}(L - \lambda I)$ eindige dimensie heeft).*

**Stelling 6.33.** *Zij $L$ een compacte zelfgeadjungeerde operator op een Hilbert-ruimte $H$. Dan is er een eindige of aftelbaar oneindige orthonormale basis $\{e_n\}$ van $\mathcal{N}(L)^\perp$ die bestaat uit eigenvectoren van $L$ met bijbehorende eigenwaarden $\lambda_n$ die reëel en ongelijk 0 zijn en waarvoor*

$$\|L\| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots > 0,$$

*terwijl* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ *als $\{e_n\}$ een oneindig stelsel is. Tenslotte geldt:*

$$Lx = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n \qquad (x \in H). \tag{6.13}$$

*Als het stelsel eindig is, dan is $L$ van eindige rang. Als het stelsel oneindig is, dan:*

$$Lx = \lim_{N\to\infty} L_N x, \quad \lim_{N\to\infty} \|L - L_N\| = 0 \quad \text{met} \quad L_N x := \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n, \quad L_N \text{ van eindige rang.}$$

## Opgaven

**Vrst 6.1.** Zij $A$ een deelverzameling van een topologische ruimte $X$. Dan is $X$ de disjuncte vereniging van de open verzameling $(\,\overline{A}\,)^0$ en van de gesloten verzameling die het complement is van $(\,\overline{A}\,)^0$. Bewijs het volgende:

a) $x \in (\,\overline{A}\,)^0$ desda $x$ een open omgeving $U$ heeft zo dat voor elke $y \in U$ en elke open omgeving $V$ van $y$ de doorsnede van $V$ met $A$ niet leeg is.
   We noemen $(\,\overline{A}\,)^0$ de deelverzameling van $X$ waar $A$ dicht ligt. Deze verzameling is leeg als $A$ nergens dicht is en gelijk aan $X$ als $A$ dicht ligt in $X$.

b) $x$ ligt in het complement van $(\,\overline{A}\,)^0$ desda er bij elke open omgeving $U$ van $x$ een $y \in U$ en een open omgeving $V$ van $y$ is zo dat $V \cap A = \emptyset$.
   We noemen het complement van $(\,\overline{A}\,)^0$ de deelverzameling van $X$ waar $A$ niet dicht ligt. Deze verzameling is gelijk aan $X$ als $A$ nergens dicht is en leeg als $A$ dicht ligt in $X$.

**Vrst 6.2.** Laat zien dat de Cantor-verzameling als deelverzameling van $\mathbb{R}$ nergens dicht is.

**Vrst 6.3.** Bewijs de beweringen in Opmerking 6.3.

**Vrst 6.4.** Bewijs dat de ruimte $V$ in Voorbeeld 6.6 van de eerste categorie in zichzelf is.

**Vrst 6.5.** Laat door een tegenvoorbeeld zien dat we in Gevolg 6.8 niet mogen concluderen dat $\|L_n - L\| \to 0$ als $n \to \infty$.

**Vrst 6.6.** Bewijs de bewering in Voorbeeld 6.9.

**Vrst 6.7.** Bewijs formule (6.1).
*Aanwijzing* Dit zou zelfs waar zijn voor een willekeurige $L^1$-functie $D_N$, maar hier kan het eenvoudiger bewezen worden door te gebruiken dat $D_N$ continu is en slechts eindig veel nulpunten heeft.

**Vrst 6.8.** Bewijs formule (6.2).
*Aanwijzing* We hebben in de syllabus *More on Fourier series*, Remark 6 gezien dat $D_N(t) = 2t^{-1}\sin(Nt) + \mathcal{O}(1)$ als $N \to \infty$, uniform voor $t \in [-\pi, \pi]$. Gebruik ook dat $\int_0^\pi |t^{-1}\sin(Nt)|\,dt = \int_0^{N\pi} |t^{-1}\sin t|\,dt$.

**Vrst 6.9.** Bewijs de beweringen in Voorbeeld 6.12.

**Vrst 6.10.** Bewijs de bewering in Voorbeeld 6.15.

**Vrst 6.11.** Bewijs de bewering in Voorbeeld 6.16.

**Vrst 6.12.** Geef een voorbeeld van een 2-dimensionale genormeerde reële vectorruimte $X$ met 1-dimensionale deelruimte $Y$, een lineaire functionaal $f$ op $Y$ en een punt $y_1$ in $X$ buiten $Y$ zo dat $f$ geen uitbreiding heeft tot een lineaire functionaal $f_1$ op $X$ met $f_1(y_1) = 0$ en $\|f_1\| = \|f\|$.

**Vrst 6.13.** Bewijs Propositie 6.20.

**Vrst 6.14.** Bewijs dat de Banach-ruimte $L^1([0,1]; dx)$ niet reflexief is.
*Aanwijzing* Breid de continue lineaire functionaal $\delta_0 \colon f \mapsto f(0)$ op $C([0,1])$ met behulp van Hahn-Banach uit tot een continue lineaire functionaal $\phi$ op $L^\infty([0,1]; dx)$. Laat zien dat $\phi$ als lineaire functionaal niet gerealiseerd kan worden door integratie over $[0,1]$ tegen een $L^1$-functie.

**Vrst 6.15.** Bewijs Propositie 6.26.

**Vrst 6.16.** Bewijs Propositie 6.27.

**Vrst 6.17.** Bewijs de beweringen in Voorbeeld 6.31.

# 7 Een eenvoudig voorbeeld van een Sobolev-ruimte

Ruwweg is een *Sobolev-ruimte* een Hilbert-ruimte bestaande uit functies op een open deel van $\mathbb{R}^n$ die $k$ keer differentieerbaar zijn, waarbij het inproduct wordt uitgedrukt in termen van integralen van de functies en hun afgeleiden, en waarbij de $k$-de afgeleide $L^2$ moet zijn, maar niet noodzakelijk continu.

We bekijken een eenvoudig voorbeeld nader. Zij $V$ de vectorruimte die bestaat uit de functies $f \in C([-1,1])$ zo dat $f$ differentieerbaar is in $x$ voor bijna alle $x \in [-1,1]$ en voor de zo bijna overal gedefinieerde functie $f'$ geldt dat $f' \in L^2([-1,1])$ (dus ook in $L^1([-1,1])$), en zo dat

$$f(1) - f(x) = \int_x^1 f'(y)\,dy. \tag{7.1}$$

Definieer op $V$ het inproduct

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^1 (f(x)\,\overline{g(x)} + f'(x)\,\overline{g'(x)})\,dx \qquad (f, g \in V). \tag{7.2}$$

Schrijf de bijbehorende norm als

$$\|f\|^2 := \langle f, f\rangle = \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2 \qquad (f \in V).$$

Achtereenvolgens hebben we dan, uitgaande van (7.1), de volgende ongelijkheden voor $f \in V$:

$$\begin{gathered}
|f(x) - f(1)| \le \int_x^1 |f'(y)|\,dy \le \int_{-1}^1 |f'(y)|\,dy \le \sqrt{2}\,\|f'\|_2,\\
\|f - f(1)\|_\infty \le \sqrt{2}\,\|f'\|_2,\\
\|f - f(1)\|_2 = \Big(\int_{-1}^1 |f(x) - f(1)|^2\,dx\Big)^{\frac12} \le \sqrt{2}\,\|f - f(1)\|_\infty \le 2\,\|f'\|_2,\\
\|f(1)\|_2 \le \|f(1) - f\|_2 + \|f\|_2 \le \|f\|_2 + 2\|f'\|_2,\\
\|f(1)\|_\infty = 2^{-\frac12}\,\|f(1)\|_2 \le 2^{-\frac12}\,\|f\|_2 + 2^{\frac12}\,\|f'\|_2,\\
\|f\|_\infty \le \|f - f(1)\|_\infty + \|f(1)\|_\infty \le 2^{-\frac12}\,\|f\|_2 + 2^{\frac32}\,\|f'\|_2 \le \big(\tfrac{17}{2}\big)^{\frac12}\,\big(\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2\big)^{\frac12} \le 3\|f\|,\\
\text{dus } \|f\|_\infty \le 3\|f\|.
\end{gathered}$$

Hierboven bedoelen we met bijv. $\|f(1)\|_2$ de $L^2$-norm van de constante functie op $[-1,1]$ die identiek gelijk is aan $f(1)$.

**Propositie 7.1.** *De inproductruimte $V$ hierboven is volledig, dus $V$ is een Hilbert-ruimte.*

**Bewijs** Zij $(f_n)$ een Cauchy-rij in $V$. Omdat dan $\lim_{m,n\to\infty} \|f_m - f_n\| = 0$, geldt ook dat $\lim_{m,n\to\infty} \|f_m - f_n\|_\infty = 0$. Dus er is een unieke $f \in C([-1,1])$ met $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$, dus $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0$. Ook zal dan $\lim_{m,n\to\infty} \|f'_m - f'_n\|_2 = 0$, dus er is een unieke $g \in L^2([-1,1])$ met $\lim_{n\to\infty} \|g - f'_n\|_2 = 0$. Dan

$$\Big|\int_x^1 g(y)\,dy - \int_x^1 f'_n(y)\,dy\Big| \le 2^{\frac12}\,\|g - f'_n\|_2 \ \to 0 \quad \text{als } n \to \infty.$$

Dus

$$f(1) - f(x) = \lim_{n\to\infty} \big(f_n(1) - f_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty} \int_x^1 f_n'(y)\,dy = \int_x^1 g(y)\,dy.$$

Dus dan geldt $f'(x) = g(x)$ bijna overal. Dus $\|f - f_n\|^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f' - f_n'\|_2^2 \to 0$ als $n \to \infty$ $\square$

De afbeelding $f \mapsto f(0)\colon V \to \mathbb{C}$ is een begrensde lineaire functionaal op $V$. Dus er volgt uit Stelling 4.19 dat er een $g \in V$ is zo dat $f(0) = \langle f, g\rangle$ voor alle $f \in V$. Laat $h(x) := \overline{g(x)}$. Laten we eens veronderstellen dat de beperking $h_+$ van $h$ tot $[0,1]$ en de beperking $h_-$ van $h$ tot $[-1,0]$ allebei $C^2$-functies zijn, maar dat mogelijk $h_+'(0) \neq h_-'(0)$. Dan kunnen we differentiaalvergelijkingen met randvoorwaarden voor $h_+$ en $h_-$ vinden die oplosbaar blijken te zijn. Zo zullen we een expliciete functie $h$ in $V$ vinden zo dat voor alle $f \in V$ geldt:

$$f(0) = \int_0^1 f(x)\,h_+(x)\,dx + \int_{-1}^0 f(x)\,h_-(x)\,dx + \int_0^1 f'(x)\,h_+'(x)\,dx + \int_{-1}^0 f'(x)\,h_-'(x)\,dx.$$

Dan geeft partiële integratie:

$$\begin{aligned} f(0) = f(0)\big(h_-'(0) - h_+'(0)\big) + f(1)h_+'(1) - f(-1)h_-'(-1) \\ + \int_0^1 f(x)\big(h_+(x) - h_+''(x)\big)\,dx + \int_{-1}^0 f(x)\big(h_-(x) - h_-''(x)\big)\,dx \end{aligned}$$

Hier zal aan voldaan zijn als $h_+$ en $h_-$ voldoen aan

$$\begin{aligned} &h_+(x) - h_+''(x) = 0, \quad h_+'(1) = 0,\\ &h_-(x) - h_-''(x) = 0, \quad h_-'(-1) = 0,\\ &h_+(0) = h_-(0), \quad h_-'(0) - h_+'(0) = 1. \end{aligned}$$

De twee differentiaalvergelijkingen geven

$$h_+(x) = A\cosh x + B\sinh x, \quad h_-(x) = C\cosh x + D\sinh x,$$

met $A, B, C, D$ nog te bepalen. De vier nevencondities geven: $A = C$, $D - B = 1$, $A\sinh 1 + B\cosh 1 = 0$, $-C\sinh 1 + D\cosh 1 = 0$. De unieke oplossing is:

$$A = C = \frac{e^2+1}{2(e^2-1)}, \qquad D = -B = \tfrac{1}{2}.$$