チュートリアル

計算機技術が飛躍的に進歩した現在においても、計算工学の根底を支える学問としての連続体力学の重要性が失われることはありません。連続体力学の数理的な基礎となるテンソル代数・テンソル解析について、きちんと学びたい、改めて学び直したい、と考える読者も少なくないのではないでしょうか。そこで本チュートリアルでは、東京電機大学の登坂宣好先生に、連続体力学のためのテンソル代数・テンソル解析の基礎について、解説をお願いいたしました。なお、チュートリアル記事は1ページ目のみを本誌に掲載し、続きは日本計算工学会HP上で公開していますので、そちらも併せてご参照ください。

テンソル代数・テンソル解析
－連続体力学の数理的基礎－
第２講 テンソル代数Ⅰ
－テンソルとは何か－

登坂 宣好

第２講概要

第1講で連続体力学の基本関係式に現れる量の表現やその解析において“テンソル”の必要性を述べた。そのテンソルの導入に際して、3つの立場が存在することを紹介した。本チュートリアルでは、テンソルを線形空間およびユークリッド線形空間上で定義された“線形写像”として捉える立場を採る。その理由は、線形写像が線形空間に一つの基底を定めることによって、行列、すなわち、“表現行列”として表され、行列の取り扱いには習熟しているからにほかならない。すなわち、教養数学としての線形代数学の範囲における基礎知識をもってテンソルを理解出来ることになる。

そこで、本講では、まず始めに、テンソルを定義し理解するために必要な線形代数学の基礎事項をまとめて示すことにする。線形空間上の線形写像をテンソルとして定義し、表現するためには線形空間の“双対空間”の概念に対する理解が必要となる。残念ながらこれまでの線形代数学では、双対空間についてあまり深く触れないのが現状である。

筆者紹介



とさか のぶよし
1971年東京大学大学院工学系研究科博士課程修了、日本大学生産工学部を経て、現在、東京電機大学未来科学部建築学科客員教授。
弾性シェルの非線形理論、積分方程式・境界要素法による連続体力学の数値解法、フィルター理論による逆問題解析等の研究に従事、現在はEngineering Science（基礎工学）教育に関心を有する。日本計算工学会名誉会員。

なお、ユークリッド線形空間上での線形写像をテンソルとして捉える場合には、“スカラー積”（内積とよばれることが多い）が重要な役割を果たすことがわかる。この空間では、線形空間とは異なり、正規直交基底や逆基底という特別な基底が設定できる。さらに、スカラー積を通して応用上多様な線形写像（テンソル）が考えられ、線形写像の表現を多様化させる。

ベクトルの演算として、スカラー積の他にベクトル積（外積・クロス積）が知られている。スカラー積は多次元性を有しているが、ベクトル積は多くの場合、3次元かつ「右手系」のベクトルの間で定義されている。そこで、この応用上便利なベクトル積を導入するための線形空間を定義する。それが“有向3次元ユークリッド空間”である。力学や連続体力学等の物理空間は多くの場合、このような空間である。ここでは、スカラー積、ベクトル積さらに、スカラー3重積とベクトル3重積が定義され、第4講で述べる各場の積分（線積分、面積分、体積分）で必要となる線素、面素、体積素の表現に用いられる。

以上、線形空間上の線形写像をテンソルと捉える立場から、この第2講は、教養次の線形代数学を眺めなおすことを主眼としてまとめたものである。その内容を以下に示す。

1 はじめに
2 線形空間
3 線形写像
4 ユークリッド線形空間
5 有向３次元ユークリッド空間
6 線形写像空間
7 双対空間
8 テンソル

1　はじめに

本チュートリアルでは、第 1 講で述べたように“テンソル”を「線形空間上で定義された線形写像」として位置付ける立場を採るので、その基礎的知識として線形代数学の基礎概念をまとめておく。

線形代数学の基本概念は、線形空間と線形写像である。線形写像の特別な場合として“線形関数”（線形汎関数）が定義できる。線形写像の集合としての線形写像空間と共に、線形関数の集合としての“双対空間”の概念および“双対基底”を理解することが、本チュートリアルでのテンソルを理解する上での鍵となる。なお、スカラー積が導入されている線形空間（ユークリッド線形空間、有向 3 次元ユークリッド空間）上の線形写像についても述べる。

線形代数学の重要性は、「連続体力学は、応用線形代数学に他ならない」と文献 [1] でも指摘されている。線形代数学については沢山の書籍が出版されているので、文献 [2,3,4,5,6,7,8] 等を参照されたい。

2　線形空間

まづ始めに、これまで多用してきた実数として表せない量としての“ベクトル”を導入する。そこで、有向線分や実数の組として導入されてきたベクトルの概念の代わりに、和と実数倍が自由自在に行うことのできる量として代数的に定義する。そのためには、線形空間の定義が必要となり、一般的かつ抽象的にベクトルが定義できることになる。

2.1　線形空間の定義

定義　線形空間

集合の元の間に次の 2 つの演算（加法と実数倍法）を導入し、その演算が以下の 8 個の公理系を満たす場合、この集合を“実数上の線形空間”(linear space) または、“ベクトル空間”(vector space) とよび V で表し、その元を“ベクトル”(vector) とよぶ。

1. 加法の公理（交換則、結合則、零元の存在、負元の存在）
2. 実数倍法の公理（結合則、第 1 分配則、第 2 分配則、1 倍）

このような定義によれば、実数の集合は、実数の加法とある数との乗法に関して上記の公理系を満たすので、線形空間の一例となる。そこで、線形空間としての実数の集合を $\boldsymbol{R}$ と表すことにする。なお、有向線分としての幾何ベクトルは、その加法を三角形則または平行四辺形則、実数倍法を有向線分の引き伸ばしまたは縮めによって与えれば、このような演算は、上記の公理系を満たすことが幾何学的に証明できる。したがって、有向線分の集合は線形空間となる。

2.2　基底

ベクトルを線形空間上の元として抽象的に定義した。このベクトルを具体化するために有効な概念を導入する。すなわち、任意のベクトルをどのように眺めれば具体的に表されるのか考える。それには、線形空間に含まれる特別な役割を果たすベクトルを選ぶことが必要である。

定義　基底と次元

線形空間 V の n 個のベクトルの組を $G = \{\boldsymbol{g}_i\}(n = 1 \sim n)$ とする。このベクトルの組 G が次の 2 条件を満たす場合、V の“基底”(basis) または“基底列”、G に含まれる各ベクトルを“基底ベクトル”という。

1. 線形独立性（G は線形独立なベクトルの組）
2. V の生成（任意のベクトルが G のベクトルの組の線形結合として表される）

なお、G に含まれるベクトルの個数を線形空間 V の“次元”(dimension) とよび、$\dim V = n$ と表す。n が有限の場合を有限次元線形空間とよぶ。

この基底の定義から、V に一つの基底を選ぶ（選び方は任意であり、一通りとは限らない）ことによって、任意のベクトルは、上記の定義の条件 2. から基底ベクトルの線形結合としてユニークに表される。例えば、基底を $G = \{\boldsymbol{g}_i\}$ とする場合、ベクトル $\boldsymbol{a}$ は次のように表される。

$$\boldsymbol{a} = a^i \boldsymbol{g}_i \tag{1}$$

この表現において、各実数 a^i を基底ベクトル $\boldsymbol{g}_i$ に関するベクトル $\boldsymbol{a}$ の成分 (component) とよぶ。すなわち、線形空間の元であるベクトルは、基底を一つ設定することにより上式のように表され、ベクトル $\boldsymbol{a}$ と n 個の実数の組 $(a^1, a^2, \cdots, a^n)$ と同一視出来ることになる。これを線形空間 V の元 $\boldsymbol{a}$ に対する“基底 G による表現”とよぶ。

3　線形写像

本チュートリアルでの主役である線形写像を定義する前に写像の概念をまとめておく。

3.1　写像

線形空間のあるベクトルに対してひとつのベクトルを対応させるような作用を“写像”(mapping) と考える。線形空間のベクトルを他の線形空間のベクトルに対応させる写像が一般的であるが、ここでは、同一の線形空間のベクトルどうしの写像を考えるものとする。すなわち、線形空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して、あるベクトル $\boldsymbol{b}$ を対応付ける写像を M とすると、写

像 M を次のように表すことにする。

$$M:\ V\ \rightarrow\ V,\ \boldsymbol{a}\in V\ \mapsto\ \boldsymbol{b}=M[\boldsymbol{a}]\ \in V \qquad (2)$$

ここで、ベクトル $\boldsymbol{b}$ をベクトル $\boldsymbol{a}$ の写像 M による“像”(image) とよび、線形空間 V を写像 M の“定義域”(domain)、V の M による像の集合 $M(V)\ \subseteq V$ を“像空間”または“値域”(range) とよぶ。なお、このような写像に対して、次のような 3 種類の写像が定義されている。

定義　全射、単射、全単射

写像 $M:\ V\ \rightarrow\ V$ に対して次の写像を定義する。

1. 全射 (surjection) ： $M(V)=V$ （ V の上への写像）
2. 単射 (injection) ： $\boldsymbol{a}\ \neq\ \tilde{\boldsymbol{a}}\ \Leftrightarrow M[\boldsymbol{a}]\neq M[\tilde{\boldsymbol{a}}]$ （ 1 対 1 写像）
3. 全単射 (bijection) ： 全射かつ単射

なお、写像 M が全単射の場合、ベクトル $\boldsymbol{b}$ から逆にそのベクトルを与えるようなベクトル $\boldsymbol{a}$ が定められるような写像として、“逆写像”(inverse mapping) が定義でき、そのような写像を M^{-1} と表す。すなわち、$M^{-1}[\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{a}$

3.2　線形写像

上記の写像のうち特に線形性を有する次のような場合がテンソルを考える場合に非常に重要となる。

定義　線形写像

写像 $T:V\ \rightarrow\ V$ が次のような線形性の性質を有する場合、写像 T を線形空間 V 上の“線形写像”(linear mapping) または“線形変換”(linear transformation) とよぶ。

1. $T[\boldsymbol{a}+\tilde{\boldsymbol{a}}]=T[\boldsymbol{a}]+T[\tilde{\boldsymbol{a}}]$ (3)
   （加法の保存性）
2. $T[p\ \boldsymbol{a}]=p\ (T[\boldsymbol{a}])\quad (p\ \in\ \boldsymbol{R})$ (4)
   （実数倍法の保存性）

線形写像の特別な場合として、その写像の値域が実数空間の場合を次のように定義する。

定義　線形関数

線形空間 V から $\boldsymbol{R}$ への線形写像 $\phi:\ V\ \rightarrow\ \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{a}\ \in\ V\ \mapsto\ \phi[\boldsymbol{a}]\ \in\ \boldsymbol{R}$ を線形空間上で定義された“線形関数”(linear function) または“線形汎関数”(linear functional) とよぶ。

この写像は、実数変数の実数値関数のベクトルを変量とする場合の拡張となっている。

4　ユークリッド線形空間

4.1　スカラー積

線形空間の元としてのベクトルは、その定義から明らかなように加法と実数倍法が可能な量として与えられる。この性質だけでは、物理現象等の表現には適さないので、幾何ベクトルの場合で馴染みの「長さや角」を有する量として与えることが必要となる。そのための概念が“計量”とか“内積”とよばれるものである。

定義　スカラー積

実数上の線形空間を V とする。その 2 つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対して、一つの実数を与える演算を $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ と表す。この演算が次の性質を満たす場合、線形空間上の“スカラー積”(scalar product) または“内積”(inner product) とよぶ。

1. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\ \cdot\ \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\ \cdot\ \boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c}\ \cdot\ \boldsymbol{b})$ (5)
   $(p\boldsymbol{a}\ \cdot\ \boldsymbol{b})=p\ (\boldsymbol{a}\ \cdot\ \boldsymbol{b})$ (6)
   （線形性）
2. $(\boldsymbol{a}\ \cdot\ \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\ \cdot\ \boldsymbol{a})$ (7)
   (対称性)
3. $(\boldsymbol{a}\ \cdot\ \boldsymbol{a})\ \ \geq\ 0\ ,(\boldsymbol{a}\ \cdot\ \boldsymbol{a})=0\ \Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ (8)
   (正定値性)

このスカラー積の定義から次のような幾何学的な概念が定義できることになる。

定義　ノルムと角

各ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して、次の実数をベクトル $\boldsymbol{a}$ の“ノルム”(norm) とよび、次のように表す。

$$\|\boldsymbol{a}\|:=\sqrt{(\boldsymbol{a}\ \cdot\ \boldsymbol{a})} \qquad (9)$$

さらに、零ベクトルでは無い 2 つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対して、次式を満たす実数 $\theta(0\leq\theta\ \leq\ \pi)$ をベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とのなす“角または角度”とよぶ。

$$\cos\theta:=\frac{(\boldsymbol{a}\ \cdot\ \boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} \qquad (10)$$

なお、上式において、$(\boldsymbol{a}\ \cdot\ \boldsymbol{b})\ =\ 0$ を満たす場合には、ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は“直交する”と言い、$\boldsymbol{a}\ \perp\ \boldsymbol{b}$ と表す。

式 (10) から 2 つのベクトルのスカラー積を次のように幾何学的に表すこともできる。

$$(\boldsymbol{a}\ \cdot\ \boldsymbol{b})=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta \qquad (11)$$

4.2　ユークリッド線形空間

線形空間の元の間に前節で定義したスカラー積が導入されているとその演算を用いてベクトルのノルムと角を通して直交性が考慮でき、幾何学的な取り扱いが可能となる。そこで、次のような線形空間を定義する。

定義　ユークリッド線形空間

有限次元の線形空間 V の元の間にスカラー積が導入されている場合、その線形空間を“ユークリッド線形空間”(Euclidean linear space) とよび、V_E と表す。

この線形空間では、線形空間とは異なり単位のノルムと直交性を有する次のような基底が構成できる。

定義　正規直交基底

ユークリッド線形空間 V_E において、次の性質を有するベクトルの組 $S = \{\boldsymbol{e}_i\}$ を V_E の“正規直交基底”(orthonormal basis) または“標準基底”(standard basis) とよぶ。

$$1.\ ||\boldsymbol{e}_i|| = 1 \quad \text{（正規性）} \tag{12}$$

$$2.\ (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} \quad \text{（直交性）} \tag{13}$$

ただし、δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号とする。

V_E では上記の正規直交基底 S の他に、一般的な基底 $G = \{\boldsymbol{g}_i\}$ も選べる。この基底に対して、スカラー積を通して次のような基底を構成できる。

定義　逆基底

ユークリッド線形空間 V_E の任意の基底を $G = \{\boldsymbol{g}_i\}$ とすると、次式を満たすベクトルの組 $\{\boldsymbol{g}^i\}$ を基底 G の“逆基底”(inverse basis) または“相反基底”とよび G^{-1} と表す。

$$(\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_j) = \delta^i_j \tag{14}$$

ここで、各基底における基底ベクトルどおしのスカラー積によって定まる以下のような実数をユークリッド線形空間の“計量”(metric) とよぶ。

$$\delta_{ij} := (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j)(\equiv (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_j)) = \delta_{ji} \tag{15}$$

$$g_{ij} := (\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j)(\equiv (\boldsymbol{g}_j \cdot \boldsymbol{g}_i)) = g_{ji} \tag{16}$$

$$g^{ij} := (\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j)(\equiv (\boldsymbol{g}^j \cdot \boldsymbol{g}^i)) = g^{ji} \tag{17}$$

この計量を用いると、基底 G と G^{-1} のベクトルは次のようにお互いに関係付けられる。

$$\boldsymbol{g}^i = g^{ij}\boldsymbol{g}_j\ , \qquad \boldsymbol{g}_i = g_{ij}\boldsymbol{g}^j \tag{18}$$

なお、2 つの計量 g_{ij} と g^{ij} との間には次式が成り立つ。

$$g^{il}g_{lj} = g_{jl}g^{li} = \delta^i_j \tag{19}$$

正規直交基底 S の逆基底 S^{-1} については、逆基底の定義 (14) から、$\boldsymbol{e}^i = \boldsymbol{e}_i$ となることがわかる。すなわち、$S = S^{-1}$ となり、2 つの基底を区別する必要はなくなる。

4.3　V_E 上の線形写像

スカラー積を有する V_E では、次に示すような多様な線形写像が導入できる。

1. 随伴写像 (adjoint mapping)

$$T^a\ :\ (T^a[\boldsymbol{v}] \cdot \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{v} \cdot T[\boldsymbol{u}])\ \ (\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V_E) \tag{20}$$

2. 対称写像 (symmetric mapping) または自己随伴写像 (self-adjoint mapping)

$$T:\ \ T^a = T \tag{21}$$

3. 交代（反対称）写像 (skew or ansymmetric mapping) または非自己随伴写像

$$T:\ T^a = -T \tag{22}$$

4. 直交写像 (orthogonal mapping)

$$T:\ \ (T[\boldsymbol{u}] \cdot T[\boldsymbol{u}]) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}),\ \ T^a = T^{-1} \tag{23}$$

5. 正定値写像 (positive definite mapping)

$$T:\ \ (\boldsymbol{u} \cdot T[\boldsymbol{u}]) > 0 \quad (\forall \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}\ \in V_E) \tag{24}$$

6. 半正定値写像 (semi-positive definite mapping) または非負写像 (non-negative mapping)

$$T:\ \ (\boldsymbol{u} \cdot T[\boldsymbol{u}]) \geq 0 \quad (\forall \boldsymbol{u}\ \in V_E) \tag{25}$$

5　3 次元ユークリッド空間

5.1　有向基底

3 次元ユークリッド線形空間は 3 次元であるから 3 個の線形独立なベクトルを選んで基底 $G = \{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3\}$ を構成できる。この基底において、3 個のベクトルの並び方の違いを区別すると、添字 $1, 2, 3$ の順列は 2 種類（偶順列または奇順列）となる。そこで、偶順列の場合を正の基底、奇順列の場合を負の基底とよび区別する。さらに、物理学等での慣習に従い“右手系”(right hand system) とか「右ネジの法則」を適用した場合、正の基底となるように基底ベクトルの「向き」を与えることにする。このような「有向性」を考慮した基底を有する 3 次元ユークリッド線形空間を“3 次元ユークリッド空間”(three dimensional Euclidean space) とよび、E^3 と表す。

5.2　ベクトル積

E^3 のベクトルの間には、既に導入したスカラー積の他に、次の演算が導入できる。

定義　ベクトル積

E^3 の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対して、次の性質を有するベクトル $\boldsymbol{c}$ を与える演算を、$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ と表し、ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の“ベクトル積”(vector product) または、「外積」、「クロス積」とよぶ。

1. $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ (26)
2. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$: 右手系 (27)
3. $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}|| \sin\theta)\boldsymbol{e}$ (28)
4. $\boldsymbol{e} := \dfrac{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})}{||(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})||}$ (29)

この定義より、ベクトル $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ は、そのノルムをベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行 4 辺形の面積、その方向を $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に垂直、向きを $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が右手系となるように定められる。そのような単位ベクトルが $\boldsymbol{e}$ である。

さらに、E^3 の 3 個のベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ に対して、スカラー積とベクトル積を用いた次の演算が定義されている。

1. スカラー 3 重積 (triple scalar product)

$$[\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ ] := ((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}) = ((\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}) = ((\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}) \tag{30}$$

2. ベクトル 3 重積 (triple vector product)

$$]\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ [:= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} \tag{31}$$

5.3　ベクトル演算の基底による表現

E^3 の右手系基底を $G = \{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3\}$ とする。ベクトル積とスカラー 3 重積を用いると、その逆基底 $G^{-1} = \{\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2,\boldsymbol{g}^3\}$ を構成する各ベクトルは次のようにベクトル積表現として表される。

$$\boldsymbol{g}^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}(\boldsymbol{g}_j \times \boldsymbol{g}_k), \quad \boldsymbol{g}_i \times \boldsymbol{g}_j = \epsilon_{ijk}\,\boldsymbol{g}^k \tag{32}$$

ただし、交代記号は次のように与えるものとする。

$$\epsilon_{ijk} := \sqrt{g}\ e_{ijk}, \quad \epsilon^{ijk} := \frac{1}{\sqrt{g}}\ e^{ijk} \tag{33}$$

$$e_{ijk},\ e^{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{順列 } (ijk) \text{ が偶順列} \\ -1 & \text{順列 } (ijk) \text{ が奇順列} \\ 0 & (ijk) \text{ が順列ではない} \end{cases} \tag{34}$$

$$\sqrt{g} := [\ \boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3\ ], \quad \frac{1}{\sqrt{g}} := [\ \boldsymbol{g}^1\ \boldsymbol{g}^2\ \boldsymbol{g}^3\ ] \tag{35}$$

ここで、E^3 のベクトルを右手系の基底 G, G^{-1}, S を用いた場合の各ベクトル演算を参考のためにまとめて以下に示しておく。

1. スカラー積

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = (a^i\boldsymbol{g}_i \cdot b^j\boldsymbol{g}_j) = a^i b^j g_{ij} \tag{36}$$

$$= (A^i\boldsymbol{e}_i \cdot B^j\boldsymbol{e}_j) = A^i B^j \delta_{ij} = A^i B^i \tag{37}$$

2. ベクトル積

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (a^i\boldsymbol{g}_i \times b^j\boldsymbol{g}_j) = \epsilon_{ijk}a^i b^j \boldsymbol{g}^k \tag{38}$$

$$= (A^i\boldsymbol{e}_i \times B^j\boldsymbol{e}_j) = e_{ijk}A^i B^j \boldsymbol{e}^k = e_{ijk}A_i B_j C_k \equiv \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \boldsymbol{e}_1 \\ A_2 & B_2 & \boldsymbol{e}_2 \\ A_3 & B_3 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} \tag{39}$$

3. スカラー 3 重積

$$[\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ ] = \epsilon_{ijk}a^i b^j c^k \tag{40}$$

$$= e_{ijk}A^i B^j C^k = e_{ijk}A_i B_j C_k \equiv \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \tag{41}$$

4. ベクトル 3 重積

$$]\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ [\ = a^i b^j c^k (g_{ki}\boldsymbol{g}_j - g_{kj}\boldsymbol{g}_i) \tag{42}$$

$$= A^i B^j C^k (\delta_{ki}\boldsymbol{e}_j - \delta_{kj}\boldsymbol{e}_i) = (A^i C^i)(B^j\boldsymbol{e}_j) - (B^j C^j)(A^i\boldsymbol{e}_i) = (A_i C_i)(B_j\boldsymbol{e}_j) - (B_j C_{j)}(A_i\boldsymbol{e}_i) \tag{43}$$

$$= \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\ \cdot\ \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\ \cdot\ \boldsymbol{c}) \tag{44}$$

6　線形写像空間

3 章で定義した線形空間上の線形写像を考える。その集合を $L(V,V) \equiv L(V)$ で表す（なお、V_E 上の線形写像の集合は $L(V_E)$ とする）。すなわち、

$$L(V) := \{T|\ Linear\ T : V \to V\} \tag{45}$$

この集合の元（線形写像）に対して、任意のベクトルに対し次のような加法と実数倍法を定義する。

$$(a) \quad \text{加法} \quad (T+S)[\boldsymbol{u}] := T[\boldsymbol{u}] + S[\boldsymbol{u}] \tag{46}$$

$$(b) \quad \text{実数倍法} \quad (pT)[\boldsymbol{u}] := p(T[\boldsymbol{u}]) \tag{47}$$

すると、和 $T+S$ と実数倍 pT は共に線形写像となり、この演算は既述の「線形空間の公理系」を満たすので、集合 $L(V)$ は線形空間となり、この空間を“線

形写像空間“ (linear mapping space) とよぶ。この空間には次のような特別な線形写像が考えられる。

$$(a)\quad \text{零写像（零元）}\quad O[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{0} \tag{48}$$

$$(b)\quad \text{負写像（負元）}\quad (-T) = (-1)T \tag{49}$$

$$(c)\quad \text{恒等写像（単位元）}\quad I[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{u} \tag{50}$$

さらに、2 つの線形写像 $T, S \in L(V)$ に対して、次のように定まる線形写像 ST を線形写像 T と S の“積（合成）”とよぶ。

$$(ST)[\boldsymbol{u}] := S(T[\boldsymbol{u}]) \tag{51}$$

なお、4.3 節で導入した各線形写像の集合として、文献 [9] に従い、次のような線形写像空間を定義する。

$L^+(V_E)$（表現行列の行列式が正値である線形写像の集合）、$L_{sym}(V_E)$（対称写像の集合）、$L_{skew}(V_E)$（交代写像の集合）、$L_{psym}(V_E)$（正定値対称写像の集合）、$L_{orth}(V_E)$（直交写像の集合）、 $L^+_{orth}(V_E)$（行列式が正値となる直交写像の集合）

7　双対空間

7.1　双対基底

上記の線形写像空間の特別な場合として、$L(V, \boldsymbol{R})$ が考えられる。すなわち、線形空間 V の任意のベクトルを一つの実数に写像する線形関数（3.2 節参照）の集合に対して次の定義を与える。

定義　双対空間

線形空間 V 上の線形関数の集合 $L(V, \boldsymbol{R})$ を V の“双対空間”(dual space) とよび、次のように表す。

$$V^* := L(V, \boldsymbol{R}) = \{\phi |\ Linear\ \phi :\ V \to \boldsymbol{R}\} \tag{52}$$

なお、この双対空間の元の間には、既に線形写像空間上で定義した加法と実数倍法に対応する演算が可能となっている。双対空間 V^* には、次のような基底が構成できる。

定義　双対基底

線形空間 V の一つの基底を $G = \{\boldsymbol{g}_i\}$ とする。この基底に対して

$$\sigma^i[\boldsymbol{g}_j] = \delta^i_j \tag{53}$$

を満たす線形関数の組 $\Sigma = \{\sigma^i\}$ を G の“双対基底”(dual basis) とよぶ。なお、この双対基底は V^* の基底である。

この結果、双対空間 V^* の任意の元（線形関数）ϕ は、双対基底 $\Sigma = \{\sigma^i\}$ を用いることによって、次のようにユニークに表される。

$$\phi = \phi_i \sigma^i \quad (\ \phi_i := \phi[\boldsymbol{g}_i]\ \in \boldsymbol{R}\ ) \tag{54}$$

以上により、線形空間 V に対して線形関数をもとにして線形空間 V^* が定義できた。そこで、V に一つの基底 G を選ぶと、その双対基底 Σ が定まる。すると、各線形空間の元は、既に示した式 (1) および式 (54) で表される。

$$\boldsymbol{a} = a^i \boldsymbol{g}_i\ , \quad \phi = \phi_i \sigma^i$$

ここで、V の基底を他の基底に変換すると、双対基底も式 (53) を介して変換され、上記の各係数も変化し、その変化の形式は第 1 講の式 (4),(6) となる。そこで、線形空間の元を「ベクトル」とよんだので、その成分の変換形式の違いを考慮し 2 つの元 $\boldsymbol{a}, \phi$ をそれぞれ「反変ベクトル」、「共変ベクトル」とよぶ。ただし、双対空間の元は共変「ベクトル」とよぶが V 上の線形関数とよばれる特別な線形写像であることは言うまでもない。

なお、双対空間 V^* の双対空間 $(V^*)^*$、すなわち、V^* 上の線形関数の集合 $(V^*)^* = \{\Phi |\ Linear\ \Phi\ :\ V^* \to \boldsymbol{R}\}$ は線形空間 V と同型対応 $(V^*)^* \equiv V^{**} \cong V$ となり、V と同一視することができる（文献 [8] 参照）。この結果、線形写像としてのテンソルを考えるベースとなる線形空間は、V およびその双対空間 V^* となる。

7.2　双対写像

ここで、線形写像 $T \in L(V)$ と線形関数 $\phi \in V^*$ に対して、式 (51) に対応する積 ϕT を考える。この積は、写像 $V \to \boldsymbol{R}$、すなわち、$\phi T \in V^*$ であるから、次のような線形写像が考えられる [8]。

定義　双対写像

線形写像 $T \in L(V)$ と線形関数 $\phi \in V^*$ に対して、次のような線形写像を T の“双対写像”(dual mapping) とよび、T^* と表す。

$$T^*[\phi] := \phi T \tag{55}$$

$$(\ (T^*[\phi])[\boldsymbol{u}] := (\phi T)[\boldsymbol{u}] = \phi[T[\boldsymbol{u}]])$$

この双対写像の定義 (55) は、既に示したユークリッド線形空間 V_E 上での T の随伴写像 T^a に対する定義 (20) に対応していることが分かる。すなわち、線形写像 T の双対写像 T^* は、スカラー積が導入されている線形空間 V_E では、T の随伴写像 T^a として表されることになる。

7.3　V_E 上の線形関数

線形空間として、ユークリッド線形空間を考える。そこで定義された線形関数に対して双対基底を用いて得られる表現を定める。そこで、V_E に一つの基底 $G = \{\boldsymbol{g}_i\}$ を選び、その双対基底 $\Sigma = \{\sigma^i\}$ を式 (53) によって構成すると、既に V_E 上で定義した基底 G の逆基底 $G^{-1} = \{\boldsymbol{g}^i\}$ の存在を考慮して次式を得る。

$$\sigma^i[\boldsymbol{g}_j] = \delta^i_j = (\boldsymbol{g}^i\ \cdot\ \boldsymbol{g}_j) \tag{56}$$

したがって、ユークリッド線形空間 V_E では基底ベクトルの逆ベクトルがスカラー積を通して双対基底ベクトルの役割を担うことになる。このような対応は線形関数の表現定理として次のようにまとめられる。

定理　線形関数の表現定理

ユークリッド線形空間 V_E 上の任意の線形関数 $\phi : V_E \to \boldsymbol{R}$ に対して、次式を満たすユニークなベクトル $\boldsymbol{v} \in V_E$ が存在する。

$$\phi[\boldsymbol{u}] = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}) \quad (\forall \phi \in V_E^*,\ \boldsymbol{u} \in V_E) \tag{57}$$

なお、上記の表現定理において、線形関数を双対基底ベクトル σ^i とすると、

$$\sigma^i[\boldsymbol{u}] = \sigma^i[u^j \boldsymbol{g}_j] = u^i = (\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{u}) \quad (\forall \boldsymbol{u} \in V_E) \tag{58}$$

となるので、ユニークに定まるベクトルは逆基底ベクトル $\boldsymbol{g}^i$ となることがわかる。すなわち、線形空間 V_E では、線形関数としての双対基底ベクトルによるベクトルの像 $\sigma^i[\boldsymbol{u}]$ は、逆基底ベクトルとベクトルとのスカラー積として具体化されることになる。

8　テンソル

本チュートリアルのテンソルに対する基本的な立場は、「線形空間上で定義された線形写像」をテンソルと捉えることである。これまで、そのベースとなる線形空間として 2 つの線形空間 V とその双対空間 V^* を用意した。すると、この 2 つの線形空間に対して、次の示す 4 種類の線形写像とその集合としての線形写像空間が定義できる。

定義　2 階テンソル

線形空間 V とその双対空間 V^* に対して次のような線形写像とその集合が考えられる。

1. $L(V) := \{T | Linear\ T :\ V \to V\}$ (59)
2. $L(V^*) := \{\mathcal{T} | Linear\ \mathcal{T} :\ V^* \to V^*\}$ (60)
3. $L(V, V^*) := \{\mathcal{A} | Linear\ \mathcal{A} :\ V \to V^*\}$ (61)
4. $L(V^*, V) := \{A | Linear\ A :\ V^* \to V\}$ (62)

これらの線形写像を総称して“ 2 階テンソル ”(Second - order Tensor) とよび、各テンソルを区別して、上記の 1.、2. を“ 混合テンソル ”、3. を“ 共変テンソル ”、4. を“ 反変テンソル ”とよぶ。さらに、それらの各テンソルの集合を、それぞれ混合テンソル空間、共変テンソル空間、反変テンソル空間とよぶ。

なお、上記の定義は線形空間 V に関する線形写像である。スカラー積を有するユークリッド線形空間 V_E 上の線形写像としてのテンソルについて考える。

V_E に基底 $G = \{\boldsymbol{g}_i\}$ とその逆基底 $G^{-1} = \{\boldsymbol{g}^i\}$ を定めると、任意のベクトル $\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{g}^i = u^i \boldsymbol{g}_i \in V_E$ に対する線形写像 T の像 $T[\boldsymbol{u}]$ は、次のようになる。

$$\begin{aligned} T[\boldsymbol{u}] &= T[u^j \boldsymbol{g}_j] = u^j T[\boldsymbol{g}_j] \\ &= T[u_j \boldsymbol{g}^j] = u_j T[\boldsymbol{g}^j] \end{aligned} \tag{63}$$

したがって、上記の各像は、T による次のような基底ベクトルの像、

$$T[\boldsymbol{g}_j] := T^i{}_j \boldsymbol{g}_i = T_{ij} \boldsymbol{g}^i \tag{64}$$

$$T[\boldsymbol{g}^j] := T^{ij} \boldsymbol{g}_i = T_i{}^j \boldsymbol{g}^i \tag{65}$$

から定まる各係数 $T^i{}_j, T_{ij}, T^{ij}, T_i{}^j$ を用いて表される。ただし、上記の各係数の表記は 4 種類の係数を区別するために第 1 講で示した表記と異なることを注意しておく。

以上より、V_E 上の線形写像 T としての「テンソル」は基底の定め方によって 4 種類の表現が存在することになる。なお、線形写像 T によるベクトル $\boldsymbol{u}$ の像 $T[\boldsymbol{u}]$ は次のようにスカラー積を用いて表される。

$$T[\boldsymbol{u}] = T^i{}_j \boldsymbol{g}_i (\boldsymbol{g}^j \cdot \boldsymbol{u}) = T_{ij} \boldsymbol{g}^i (\boldsymbol{g}^j \cdot \boldsymbol{u}) \tag{66}$$

$$= T^{ij} \boldsymbol{g}_i (\boldsymbol{g}_j \cdot \boldsymbol{u}) = T_i{}^j \boldsymbol{g}^i (\boldsymbol{g}_j \cdot \boldsymbol{u}) \tag{67}$$

参考文献

[1] 清水昭比古：連続体力学の話法-流体力学、材料力学の前に-、森北出版（株）、 (2012)

[2] Martin.A.D. and V.J.Mizel : Introduction to Linear Algebra, McGraw-Hill Book Company, (1966)

[3] 斉藤正彦：線型代数学入門、（基礎数学 1 ）、東京大学出版会、(1966)

[4] ラング（芹沢訳）: ラング線形代数学、ダイヤモンド社、(1971)

[5] 笠原皓司：線形代数と固有値問題-スペクトル分解を中心に-、現代数学社、 (1972)

[6] ニッカーソン、スペンサー、スティーンロッド（原田、佐藤訳）: 現代ベクトル解析、岩波書店、(1965)

[7] 有馬哲、浅枝陽 : ベクトル場と電磁場　（電磁気学と相対論のためのベクトル解析）、東京図書（株）、(1987)

[8] 新井朝雄：現代ベクトル解析の原理と応用、共立出版、(2006)

[9] Gurtin, M.E. : An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, (2003)