チュートリアル

計算機技術が飛躍的に進歩した現在においても、計算工学の根底を支える学問としての連続体力学の重要性が失われることはありません。連続体力学の数理的な基礎となるテンソル代数・テンソル解析について、きちんと学びたい、改めて学び直したい、と考える読者も少なくないのではないでしょうか。そこで本チュートリアルでは、東京電機大学の登坂宣好先生に、連続体力学のためのテンソル代数・テンソル解析の基礎について、解説をお願いいたしました。なお、チュートリアル記事は1ページ目のみを本誌に掲載し、続きは日本計算工学会HP上で公開していますので、そちらも併せてご参照ください。

テンソル代数・テンソル解析
－連続体力学の数理的基礎－
第４講 テンソル解析
－テンソル場の微積分－

登坂 宣好

第4講概要

チュートリアルの第2, 3講では、ベクトルおよびテンソルの「代数」を線形空間論の立場からまとめて述べた。特に、テンソルを“線形空間上の線形写像”として定義し、その具体的な表現には、線形空間に採用した基底の「写像積」の概念が必要となることを強調した。線形写像としてのテンソルは、様々な表現によって表されることも示した。

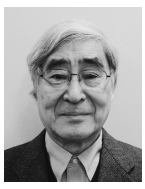
ベクトルおよびテンソルという代数的量が物理量として用いられる場合には、物体点の集合としての「連続体」の各点さらに各時刻に依存する量としての取り扱いが必要となる。このように物理量の空間および時間に依存する変動を記述するには、微分と積分、すなわち「解析」が必須となる。その解析では、実関数（1次元スカラー場）の場合にその導関数と定積分との間に「微積分の基本定理」とよばれている重要な定理が存在している。物理量を対象とする場合、スカラー・ベクトル・テンソル場の微分法と積分法とを結びつける「基本定理」を導くことが本講の目的である。

そこで、本講では、物理量としてスカラー・ベクトル・テンソル場を定義し、それらの微分法と積分法を示す。各場を「アフィン空間」に基づいて定義し、微分法としては、各場に適用可能となるいわゆる、「方向微分係数」と「微分」を採用することによってベクトル場およびテンソル場を含めて系統的に“勾配”(gradient)、“発散”(divergence)、“回転”(rotation)を導出できることを示す。なお、これらの微分量の表現において、いわゆる「ナブラ」(nabla)とよばれる記号的ベクトルを導入する。さらに、ナブラによる各場の微分量を与える“微分写像”を定義する。このような系統的導出において、従来のベクトル同士の演算（スカラー積・ベクトル積・写像積）を拡張したベクトルとテンソルの演算を導入する。

次に、連続体を3次元有向ユークリッド空間内の閉曲面で囲まれた閉領域とみなした場合における各場の積分法を考える。その積分は、面積分と体積分となる。各場の微分量と積分の間に成立するのが、微分積分の基本定理としての「発散定理」である。そこで、各場の微分量に対応して定まる「発散定理」を示す。なお、この定理は、各場の微分量として、勾配、発散、回転に対する積分表現となる。この種々の形式による発散定理では、前述したナブラと曲面の外向き単位法線ベクトルとの関係が明確化されることになる。すなわち、ナブラ記号の導入における本質とその有効性が示される。本講の内容を以下に示す。

1　はじめに
2　スカラー場・ベクトル場・テンソル場
3　スカラー積・ベクトル積・写像積
4　場の微分法
5　場の積分法
6　発散定理

筆者紹介



とさか のぶよし
1971年東京大学大学院工学系研究科博士課程修了、日本大学生産工学部を経て、現在、東京電機大学未来科学部建築学科客員教授。
弾性シェルの非線形理論、積分方程式・境界要素法による連続体力学の数値解法、フィルター理論による逆問題解析等の研究に従事、現在はEngineering Science（基礎工学）教育に関心を有する。日本計算工学会名誉会員。

1　はじめに

第 1 講 2 章でも示したが、連続体力学の基本方程式にはベクトルやテンソルの微分量としての勾配、発散、回転量が用いられている。これらの微分量は、曲面および体積積分を通して微分積分の基本定理である発散定理として関係付けられている。この発散定理は、積分表現された線形運動量平衡則から微分方程式表現として表される運動方程式を誘導する際に重要な役割を果たしている。また、場の境界値問題の弱形式に基づく有限要素法の定式化でも適用されている。

本講では、連続体力学等の物理量の空間的変動を捉えるのに必要なスカラー・ベクトル・テンソル場の微分積分法である「解析」を展開する。特に、各場の微分量の誘導を「方向微分係数」および「微分」を用いて系統的に誘導することが特徴である。なお、既にこのような誘導法について文献 [1,2] で示した。

なお、本講では各場の微分量とそれを与える微分写像および積分定理を系統的に導出するために、これまでのベクトル同士の演算（スカラー積・ベクトル積・写像積）をベクトルとテンソルの演算に拡張する。その際に重要な役割を演じるのが記号的ベクトルとしての“ナブラ”である [3]。このナブラを用いることで、場の解析が系統的に展開できる。

2　スカラー場・ベクトル場・テンソル場

本論で解析の対象とするのは物理量である。この物理量は、3 次元ユークリッド空間に占める連続体に関するものである。物体点とよばれる各点に物理量としてのスカラー・ベクトル・テンソルが与えられ、それらはこの物体点に依存して定められる。すなわち、これらの物理量は、それぞれスカラー場・ベクトル場・テンソル場として表される。そこで、先ず始めにこれらの「場」を定義するのに必要な空間を導入する [4]。

定義　3 次元アフィン空間

3 次元有向（右手系）ユークリッド線形空間 V_E^3 が付随する点集合 P^3 を“3 次元アフィン空間”とよび、$\mathcal{A}^3(P^3, V_E^3)$ または簡単に $\mathcal{A}^3$ と表す。この空間には、特別な点 O と V_E^3 の右手系基底 $G = \{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3\}$ を用いた「座標枠」(O, G) を設定する。

この空間の任意の点 P は、上記の座標枠を用いることによって、次のように表されることになる。

$$P = O + \boldsymbol{x} = O + x^i \boldsymbol{g}_i \tag{1}$$

この点 P に対してユニークに定まるベクトル $\boldsymbol{x} \in V_E^3$ は、原点 O に関する点 P の「位置ベクトル」とよばれる。この結果、アフィン空間の各点は座標枠を固定したもとでその位置ベクトルと同一視できる。すなわち、

$$P \cong \boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{g}_i$$

定義　スカラー場・ベクトル場・テンソル場

アフィン空間 $\mathcal{A}^3$ 上の各場を次のような写像として定義する。

- スカラー場 $f : \mathcal{A}^3 \to \boldsymbol{R}$
- ベクトル場 $\boldsymbol{v} : \mathcal{A}^3 \to V_E^3$
- テンソル場 $T : \mathcal{A}^3 \to L(V_E^3)$

なお、この定義から各場をその成分のみが点に依存するものとして次のように表すことにする。

$$f(P) \cong f(x^1, x^2, x^3)\mathbf{1} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{v}(P) = v^i(P)\boldsymbol{g}_i \cong v^i(x^1, x^2, x^3)\boldsymbol{g}_i \tag{3}$$

$$T(P) = T^i{}_j(P)(\boldsymbol{g}_i \odot \boldsymbol{g}^j) \cong T^i{}_j(x^1, x^2, x^3)(\boldsymbol{g}_i \odot \boldsymbol{g}^j) \tag{4}$$

ただし、式 (2) の右辺の $\mathbf{1}$ は 1 次元線形空間としての $\boldsymbol{R}$ の標準基底とする。

この結果、上記の各場の成分は「3 変数関数」として取り扱うことができることになる。

3　スカラー積・ベクトル積・写像積

テンソル場を含めて 4,5 章で述べる場の微分積分を展開するには、これまでの 2 つのベクトルの間で定義された演算（スカラー積・ベクトル積・写像積）をベクトルと線形写像（テンソル）の演算として拡張する必要がある。その演算の拡張を以下に述べる。

3.1　スカラー積の拡張

2 つのベクトルのスカラー積をベクトル $\boldsymbol{a}$ と線形写像 B に対して次のように拡張する。

$$(\boldsymbol{a} \cdot B)[\boldsymbol{u}] := (\boldsymbol{a} \cdot B[\boldsymbol{u}]) \quad (\forall \boldsymbol{u} \in V_E) \tag{5}$$

この定義から演算 $(\boldsymbol{a} \cdot B)$ は一つのベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して実数 $(\boldsymbol{a} \cdot B[\boldsymbol{u}])$ を定める線形写像、すなわち、V_E 上の線形関数であることが分かる。さらに、スカラー積の性質から、上記の定義式の右辺は

$$(\boldsymbol{a} \cdot B[\boldsymbol{u}]) = (B[\boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{a})$$

となるので、線形写像 B とベクトル $\boldsymbol{a}$ のスカラー積を次のように定義する。

$$(B \cdot \boldsymbol{a})[\boldsymbol{u}] := (B[\boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{a}) \tag{6}$$

以上の定義より、この演算について、次の交換則が成り立つことになる。

$$(\boldsymbol{a} \cdot B) = (B \cdot \boldsymbol{a}) \tag{7}$$

線形写像が恒等写像すなわち、$B \equiv I$ の場合は、

$$(\boldsymbol{a} \cdot I)[\boldsymbol{u}] = (\boldsymbol{a} \cdot I[\boldsymbol{u}]) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u})$$

$$(I \cdot \boldsymbol{a})[\boldsymbol{u}] = (I[\boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a})$$

となり、ベクトル同士のスカラー積となる。

次に線形写像 B が 2 つのベクトルの写像積として、$B = (\boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{c})$ の場合、上記の定義から次のような性質を有することが分かる。

$$(\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{c})) = ((\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{b}) \tag{8}$$

3.2　ベクトル積の拡張

ベクトルのベクトル積を拡張したベクトルと線形写像のベクトル積を考える。スカラー積に対応して、任意のベクトルに対して、次のような演算を定義する。

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} \times B)[\boldsymbol{u}] &:= (\boldsymbol{a} \times B[\boldsymbol{u}]) \\ &= ((\boldsymbol{a} \times B[\boldsymbol{g}_j]) \odot \boldsymbol{g}^j)[\boldsymbol{u}] \qquad (9) \\ (B \times \boldsymbol{a})[\boldsymbol{u}] &:= (B[\boldsymbol{u}] \times \boldsymbol{a}) \\ &= ((B[\boldsymbol{g}_j] \times \boldsymbol{a}) \odot \boldsymbol{g}^j)[\boldsymbol{u}] \qquad (10)\end{aligned}$$

この定義からベクトルと線形写像のベクトル積は、一つのベクトルに対してベクトル積から定まるベクトルを与える線形演算であることが分かる。すなわち、ベクトル積の拡張 $(\boldsymbol{a} \times B), (B \times \boldsymbol{a})$ は V_E 上の線形写像である。さらに、この演算は次の性質を有する。

$$(\boldsymbol{a} \times B) = -(B \times \boldsymbol{a}) \tag{11}$$

$B \equiv I$ の場合は、次のようにベクトル積となる。

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} \times I)[\boldsymbol{u}] &= (\boldsymbol{a} \times I[\boldsymbol{u}]) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u}) \\ (I \times \boldsymbol{a})[\boldsymbol{u}] &= (I[\boldsymbol{u}] \times \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a})\end{aligned}$$

$B = (\boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{c})$ の場合にはスカラー積に対応する次の性質を有することになる。

$$(\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{c})) = ((\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \odot \boldsymbol{c}) \tag{12}$$

3.3　写像積

二つのベクトルの写像積を拡張する。先ず始めに、ベクトルと線形写像の写像積を次のように定義する。

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} \odot B)[\boldsymbol{u}] &: = (\boldsymbol{a} \odot B[\boldsymbol{u}]) \\ &= ((\boldsymbol{a} \odot B[\boldsymbol{g}_i]) \odot \boldsymbol{g}^i)[\boldsymbol{u}] \qquad (13)\end{aligned}$$

次に、線形写像とベクトルの写像積を次のように定義する。

$$(B \odot \boldsymbol{a})[\boldsymbol{u}] := B(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}) \tag{14}$$

したがって、この場合の写像積については

$$(\boldsymbol{a} \odot B[\boldsymbol{u}]) \neq (B[\boldsymbol{u}] \odot \boldsymbol{a})$$

となることに注意を有する。なお、線形写像が恒等写像の場合には次のようになる。

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} \odot I)[\boldsymbol{u}] &= (\boldsymbol{a} \odot I[\boldsymbol{u}]) = (\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{u}) \\ (I \odot \boldsymbol{a})[\boldsymbol{u}] &= I(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u})\end{aligned}$$

次に、$B = (\boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{c})$ の場合には、既に第 3 講 7 章で示した 3 階テンソルの結合則として次のようになる。

$$(\boldsymbol{a} \odot (\boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{c})) = ((\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}) \odot \boldsymbol{c}) \equiv (\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{c}) \tag{15}$$

4　場の微分法

4.1　場の微分法

各場に対する微分量を定めるために、次のような“方向微分係数”(directional derivative) を用いることにする。

定義　　方向微分係数

スカラー・ベクトル・テンソル場をまとめて Φ とする。その微分可能な場 Φ に対して次のような極限値

$$\begin{aligned}(D_{\boldsymbol{u}}\Phi)_P &:= \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(P + h\boldsymbol{u}) - \Phi(P)}{h} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}\Phi(P)u^k \qquad (16)\end{aligned}$$

が存在した場合、それを場 Φ の $\boldsymbol{u}$ 方向への点 P における“方向微分係数”とよび上記のように表す。

この定義から点 P に変化を与えるベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して線形性を有することが分かるので、線形写像を用いて次のように表される。

$$(D_{\boldsymbol{u}}\Phi)_P = (d\Phi)_P[\boldsymbol{u}] \tag{17}$$

そこで、この線形写像 $(d\Phi)_P$ を場 Φ の点 P における“微分”とよぶ。

4.2　スカラー場の微分量

スカラー場を f とすると、上記の定義より次のような方向微分係数が得られる。

$$\begin{aligned}(D_{\boldsymbol{u}}f)_P &:= \lim_{h \to 0} \frac{f(P + h\boldsymbol{u}) - f(P)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x^k + hu^k) - f(x^k)}{h} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}f(P)u^k = \frac{\partial}{\partial x^k}f(P)(\boldsymbol{g}^k \cdot \boldsymbol{u}) \\ &= (\frac{\partial}{\partial x^k}\boldsymbol{g}^k f(P) \cdot \boldsymbol{u}) \qquad (18)\end{aligned}$$

この方向微分係数の表現に対して、ベクトル（成分）に対して線形であることが分かるので、線形写像としての微分量を表すには、双対基底 σ^k を用いることによって次のようにして、スカラー場 f の点 P における微分は線形空間 V の双対空間 V^* の元であることが分かる。すなわち、線形空間 V 上の線形関数である。

$$\frac{\partial}{\partial x^k} f(P) u^k = \frac{\partial}{\partial x^k} f(P)(\sigma^k[\boldsymbol{u}]) = (\frac{\partial}{\partial x^k} f(P)\sigma^k)[\boldsymbol{u}] \equiv (df)_P[\boldsymbol{u}] \quad (19)$$

したがって、式 (18) から次のような関係が成り立つことになる。

$$(D_{\boldsymbol{u}} f)_P = (df)_P[\boldsymbol{u}] = (\frac{\partial}{\partial x^k} \boldsymbol{g}^k f(P) \ \cdot \ \boldsymbol{u}) \quad (20)$$

そこで、この線形関数としての微分 df のスカラー積による表現に注目して、スカラー場 $f(P)$ から得られるベクトル場を点 P における“勾配ベクトル場”とよび次のように表す。

$$grad\ f(P) := \frac{\partial}{\partial x^k} \boldsymbol{g}^k f(P) \quad (21)$$

スカラー場の微分量、すなわちスカラー場から $grad\ f(P)$ を定義するには「ベクトルの実数倍」の演算が用いられている。

4.3　ベクトル場の微分量

ベクトル場に対する方向微分係数を定義 (16) によって求めると次のようになる。

$$\begin{aligned}(D_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v})_P &:= \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{v}(P+h\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{v}(P)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{v^i(P+hu^k) - v^i(P)}{h} \boldsymbol{g}_i \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} v^i(P) u^k \boldsymbol{g}_i \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} v^i(P) \boldsymbol{g}_i (\boldsymbol{g}^k \cdot \boldsymbol{u}) \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、基底ベクトルの写像積を用いると、

$$\begin{aligned}(D_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v})_P &= (\frac{\partial}{\partial x^k} v^i(P)(\boldsymbol{g}_i \odot \boldsymbol{g}^k))[\boldsymbol{u}] \\ &= (d\boldsymbol{v})_P[\boldsymbol{u}] \end{aligned}$$

となり、ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の点 P における微分が次のように 2 階テンソル場として定められる。

$$(d\boldsymbol{v})_P = \frac{\partial}{\partial x^k} v^i(P)(\boldsymbol{g}_i \odot \boldsymbol{g}^k) \quad (23)$$

さらに、この随伴写像は次のようになる。

$$((d\boldsymbol{v})^a)_P = \frac{\partial}{\partial x^k} v^i(P)(\boldsymbol{g}^k \odot \boldsymbol{g}_i) \quad (24)$$

これらの微分を用いることによって、以下に示すようなベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の各微分量（発散、回転、勾配）を定義する。

$$\begin{aligned} div\ \ \boldsymbol{v}(P) &:= T_r[(d\boldsymbol{v})_P] \quad (25)\\ &= (\boldsymbol{g}^m \cdot (d\boldsymbol{v})_P[\boldsymbol{g}_m]) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} v^k(P) \\ &= (\boldsymbol{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \cdot \boldsymbol{v}(P)) \quad (26)\\ rot\ \ \boldsymbol{v}(P) &:= (((d\boldsymbol{v})^a)_P[\boldsymbol{g}_m] \times \boldsymbol{g}^m) \quad (27)\\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} v^i(P)(\boldsymbol{g}^k \times \boldsymbol{g}_i) \\ &= (\boldsymbol{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \times \boldsymbol{v}(P)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} \epsilon^{kjl} g_{ij} v^i(P) \boldsymbol{g}_l \quad (28)\\ grad\ \ \boldsymbol{v}(P) &:= ((d\boldsymbol{v})^a)_P \quad (29)\\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} v^i(P)(\boldsymbol{g}^k \odot \boldsymbol{g}_i) \\ &= (\boldsymbol{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \odot \boldsymbol{v}(P)) \quad (30) \end{aligned}$$

以上の結果からベクトル場の各微分量を定義するにはベクトル同士の演算として、「スカラー積」、「ベクトル積」、「写像積」が用いられている。なお、上記の勾配テンソル場は、連続体力学では、変形勾配テンソルとして現れる。文献 [5] では、式 (30) の代わりに $grad\ \boldsymbol{v}(P) = (d\boldsymbol{v})_P$ として定義されている。発散スカラー場はベクトル場の微分のトレースとして定義したが、トレースの性質（第 3 講 3．4 節）から $((d\boldsymbol{v})^a)_P$ のトレースと等しくなる。回転ベクトル場に関しては、第 3 講 6.1 節で示した「交代写像のベクトル積表現定理」を用いて以下に示すように与えられることが分かる。

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の微分 $(d\boldsymbol{v})_P$ を交代化して得られる交代線形写像 $W(P) := (d\boldsymbol{v})_P - ((d\boldsymbol{v})^a)_P$ の任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対する像を定めると、ベクトル 3 重積（第 2 講式 (44)）を考慮することによって、

$$\begin{aligned} W(P)[\boldsymbol{u}] &= \frac{\partial}{\partial x^k}\ v^i(P)(((\boldsymbol{g}_i \odot \boldsymbol{g}^k) - (\boldsymbol{g}^k \odot \boldsymbol{g}_i))[\boldsymbol{u}]) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}\ (\boldsymbol{v}(P)(\boldsymbol{g}^k \cdot \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{g}^k(\boldsymbol{v}(P) \cdot \boldsymbol{u})) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}\ (\boldsymbol{g}^k \times \boldsymbol{v}(P)) \times \boldsymbol{u} \\ &= (rot\ \ \boldsymbol{v}(P)) \times \boldsymbol{u} \end{aligned} \quad (31)$$

となり、ベクトル場の微分の交代化から得られる交代線形写像の「軸ベクトル（場）」が、ベクトル場の回転ベクトル場として表されることが明らかとなった。以上によって、代数的にはベクトル場の発散量が $(d\boldsymbol{v})_P$ の対称部分、回転量がその反対称部分から得られる微分量であることが分かる [6]。

4.4　テンソル場の微分量

連続体力学における基本概念である「応力」や「歪」等に対する 2 階混合テンソル場を対象としてその

微分量を与える。テンソル場を T とし、$T(P) = T^i{}_j(P)(\boldsymbol{g}_i \odot \boldsymbol{g}^j)$ とすると、その方向微分係数は次のようになる。

$$\begin{aligned}(D_{\boldsymbol{u}}T)_P &:= \lim_{h\to 0}\frac{T(P+h\boldsymbol{u})-T(P)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{T^i{}_j(x^k+hu^k)-T^i{}_j(x^k)}{h}(\boldsymbol{g}_i\odot\boldsymbol{g}^j)\\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}\,T^i{}_j(P)\,u^k(\boldsymbol{g}_i\odot\boldsymbol{g}^j)\\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}\,T^i{}_j(P)(\boldsymbol{g}_i\odot\boldsymbol{g}^j)(\boldsymbol{g}^k\cdot\boldsymbol{u}) \qquad (32)\end{aligned}$$

この方向微分係数で、ベクトル $\boldsymbol{u}$（の成分）に関して線形性を有することがわかるので、テンソル場の微分を定めるために 3 つの基底ベクトルの間に第 3 講 7 章で定義した写像積の概念を適用し、次式を得る。

$$\begin{aligned}(D_{\boldsymbol{u}}T)_P &= \frac{\partial}{\partial x^k}\,T^i{}_j(P)((\boldsymbol{g}_i\odot\boldsymbol{g}^j)\odot\boldsymbol{g}^k)[\boldsymbol{u}]\\ &= (dT)_P[\boldsymbol{u}] \qquad (33)\end{aligned}$$

となるので、次のように微分が 3 階混合テンソル場として定められる。

$$\begin{aligned}(dT)_P &:= \frac{\partial}{\partial x^k}\,T^i{}_j(P)((\boldsymbol{g}_i\odot\boldsymbol{g}^j)\odot\boldsymbol{g}^k)\\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}\,T^i{}_j(P)(\boldsymbol{g}_i\odot(\boldsymbol{g}^j\odot\boldsymbol{g}^k)) \qquad (34)\end{aligned}$$

さらに、

$$\begin{aligned}(dT^a)_P &= \frac{\partial}{\partial x^k}\,T^i{}_j(P)((\boldsymbol{g}^j\odot\boldsymbol{g}_i)\odot\boldsymbol{g}^k)\\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}\,T^i{}_j(P)(\boldsymbol{g}^j\odot(\boldsymbol{g}_i\odot\boldsymbol{g}^k)) \qquad (35)\end{aligned}$$

これらの微分を用いることによって、定義される各微分量を以下に示す。

$$\begin{aligned}(a)\ grad\ T(P) &:= ((dT^a)^a)_P\\ &= (\frac{\partial}{\partial x^k}\,T^i{}_j(P)((\boldsymbol{g}^j\odot\boldsymbol{g}_i)\odot\boldsymbol{g}^k))^a\\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}(\boldsymbol{g}^k\odot(T^i{}_j(P)(\boldsymbol{g}^j\odot\boldsymbol{g}_i)))\\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}(\boldsymbol{g}^k\odot T^a(P)) \qquad (36)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b)\ div\ T(P) &:= ((dT)_P[\boldsymbol{g}_m])[\boldsymbol{g}^m]\\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}\,T^i{}_j(P)g^{jk}\boldsymbol{g}_i\\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}\,T^i{}_j(P)\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{g}^j\cdot\boldsymbol{g}^k)\\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}\,T^i{}_j(P)(\boldsymbol{g}_i\odot\boldsymbol{g}^j)[\boldsymbol{g}^k]\\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}T(P)[\boldsymbol{g}^k] \qquad (37)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c)\ rot\ T(P) &:= (\boldsymbol{g}_n\odot\boldsymbol{g}_m)((dT^a)_P[\boldsymbol{g}^m\times\boldsymbol{g}^n])\\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}\epsilon^{kjn}\,T^i{}_j(P)(\boldsymbol{g}_n\odot\boldsymbol{g}_i)\\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}\,T^i{}_j(P)((\boldsymbol{g}^k\times\boldsymbol{g}^j)\odot\boldsymbol{g}_i)\\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}((\boldsymbol{g}^k\times\boldsymbol{g}^j)\odot(T(P)[\boldsymbol{g}_j]))\\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}(((\boldsymbol{g}^k\times\boldsymbol{g}^j)\odot\boldsymbol{g}_j)T^a(P))\\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}(\boldsymbol{g}^k\times I)T^a(P) \qquad (38)\end{aligned}$$

ただし、これらの微分量では、3 章で定義したベクトルとテンソルのベクトル積および写像積演算を用いて表現されている。

4.5　ナブラによる表現

これまで各場の微分量として、勾配、発散、回転を与えてきた。これらの各表現において共通に現れる微分演算に注目し、従来からベクトル解析で多用されている“ナブラ“ (nabla) とよばれる次の「記号的ベクトル」を導入する [7]。

$$\boldsymbol{\nabla} := \boldsymbol{g}^k\frac{\partial}{\partial x^k} \qquad (39)$$

すなわち、このベクトルは、変数 x^k に関する偏微分操作をベクトルの成分とする V_E のベクトルとみなし、各量の成分に対して偏微分操作を行うものとする。

これまで導出してきた各場の微分量はナブラを用いると次のように簡潔かつ系統的な表現となる。

$$grad\ f(P) = \boldsymbol{\nabla}f(P)\ (\text{ベクトル場}) \qquad (40)$$

$$grad\ \boldsymbol{v}(P) = (\boldsymbol{\nabla}\odot\boldsymbol{v}(P))\ (\text{2 階テンソル場}) \qquad (41)$$

$$grad\ T(P) = (\boldsymbol{\nabla}\odot T^a(P))\ (\text{3 階テンソル場}) \qquad (42)$$

$$div\ \boldsymbol{v}(P) = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}(P))\ (\text{スカラー場}) \qquad (43)$$

$$div\ T(P) = T(P)[\boldsymbol{\nabla}]\ (\text{ベクトル場}) \qquad (44)$$

$$rot\ \boldsymbol{v}(P) = (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}(P))\ (\text{ベクトル場}) \qquad (45)$$

$$\begin{aligned}rot\ T(P) &= (\boldsymbol{\nabla}\times I)T^a(P)\\ &= (\boldsymbol{\nabla}\times T^a(P))\ (\text{2 階テンソル場}) \qquad (46)\end{aligned}$$

4.6　ベクトル場とテンソル場の微分量の関係

3.4 節では、テンソル場の微分量をベクトル場の微分量とは独立に定義し導出した。ここでは、ベクトル場をテンソル場によるある定ベクトルの像として次のように表される場合を考える。

$$\boldsymbol{v}(P) = T^a(P)[\boldsymbol{u}] \qquad (47)$$

すると、以下に示すようにベクトル場の微分量とテンソル場の微分量の間に次のような関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} grad\ \boldsymbol{v}(P) &= grad\ (T^a(P)[\boldsymbol{u}]) \\ &= (\boldsymbol{\nabla} \odot \boldsymbol{v}(P)) = (\boldsymbol{\nabla} \odot (T^a(P)[\boldsymbol{u}])) \\ &= (T(P)[\boldsymbol{\nabla}] \cdot \boldsymbol{u}) \\ &= (\boldsymbol{\nabla} \odot T^a(P))[\boldsymbol{u}] \\ &= (grad\ T(P))[\boldsymbol{u}] \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} div\ \boldsymbol{v}(P) &= div\ (T^a(P)[\boldsymbol{u}]) \\ &= (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}(P)) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot (T^a(P)[\boldsymbol{u}])) \\ &= (\boldsymbol{\nabla} \cdot T^a(P))[\boldsymbol{u}] \\ &= (T(P)[\boldsymbol{\nabla}] \cdot \boldsymbol{u}) \\ &= (div\ T(P) \cdot \boldsymbol{u}) \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} rot\ \boldsymbol{v}(P) &= rot\ (T^a(P)[\boldsymbol{u}]) \\ &= (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}(P)) = (\boldsymbol{\nabla} \times (T^a(P)[\boldsymbol{u}])) \\ &= (\boldsymbol{\nabla} \times T^a(P))[\boldsymbol{u}] \\ &= (rot\ T(P))[\boldsymbol{u}] \end{aligned} \tag{50}$$

これらの各式が任意の定ベクトル $\boldsymbol{u}$ について成立するとして、テンソル場 T の各微分量を定義すると、次式が得られることになる。

$$\begin{aligned} grad\ T(P) &:= (\boldsymbol{\nabla} \cdot T^a(P)) \\ div\ T(P) &:= (\boldsymbol{\nabla} \cdot T^a(P)) \\ rot\ T(P) &:= (\boldsymbol{\nabla} \times T^a(P)) \end{aligned}$$

このテンソル場の微分量の表現は、$div\ T(P)$ を除いて既に導出したものと一致している。$div\ T(P)$ の表現は、上記の定義より表現 $(\boldsymbol{\nabla} \cdot T^a(P))$ は V_E 上の定ベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して、$div\ \boldsymbol{v}(P)$ を与える線形写像、すなわち V_E 上の線形関数となっている。そこで、この線形関数に第 2 講 7 章で述べた線形関数のスカラー積による表現定理を適用すると、線形関数すなわち双対空間 V_E^* のベクトルは、ユニークな V_E のベクトルと対応する。すなわち、

$$(\boldsymbol{\nabla} \cdot T^a(P))(\in V_E^*) \cong T(P)[\boldsymbol{\nabla}](\in V_E)$$

その結果、式 (49) の表現を得る。以上によって、テンソル場の微分量はナブラと随伴テンソル場の各演算を用いて系統的に表されたことになる。

4.7　場の微分写像

これまで各場の微分量を示してきた。特に、“ ナブラ ” を用いたその表現は極めて簡潔かつ系統的であることがわかる。そこで、これらの表現から各場の点 P における微分量をを定めるような写像として、次のような「微分写像」が導入できる。

- スカラー場の勾配写像

$$\begin{aligned} g[f(P)] &:= grad\ f(p) = \boldsymbol{\nabla} f(P) \\ &= (\boldsymbol{\nabla} \odot \mathbf{1})[f(P)] \\ g &:= (\boldsymbol{\nabla} \odot \mathbf{1}) \end{aligned} \tag{51}$$

- ベクトル場の勾配写像

$$\begin{aligned} g[\boldsymbol{v}(P)] &:= grad\ \boldsymbol{v}(P) = (\boldsymbol{\nabla} \odot \boldsymbol{v}(P)) \\ &= (\boldsymbol{\nabla} \odot I)[\boldsymbol{v}(P)] \\ g &:= (\boldsymbol{\nabla} \odot I) \end{aligned} \tag{52}$$

- ベクトル場の発散写像

$$\begin{aligned} d[\boldsymbol{v}(P)] &:= div\ \boldsymbol{v}(P) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}(P)) \\ &= (\boldsymbol{\nabla} \cdot I)[\boldsymbol{v}(P)] \\ d &:= (\boldsymbol{\nabla} \cdot I) \end{aligned} \tag{53}$$

- ベクトル場の回転写像

$$\begin{aligned} r[\boldsymbol{v}(P)] &:= rot\ \boldsymbol{v}(P) = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}(P)) \\ &= (\boldsymbol{\nabla} \times I)[\boldsymbol{v}(P)] \\ r &:= (\boldsymbol{\nabla} \times I) \end{aligned} \tag{54}$$

- テンソル場の勾配写像

$$\begin{aligned} G[T(P)] &:= grad\ T(P) = (\boldsymbol{\nabla} \odot T^a(P)) \\ &= (\boldsymbol{\nabla} \odot \Upsilon)[T(P)] \\ G &:= (\boldsymbol{\nabla} \odot \Upsilon) \end{aligned} \tag{55}$$

- テンソル場の発散写像

$$\begin{aligned} D[T(P)] &:= div\ T(P) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot T^a(P)) \\ &= (\boldsymbol{\nabla} \cdot \Upsilon)[T(P)] \\ D &:= (\boldsymbol{\nabla} \cdot \Upsilon) \end{aligned} \tag{56}$$

- テンソル場の回転写像

$$\begin{aligned} R[T(P)] &:= rot\ T(P) = (\boldsymbol{\nabla} \times T^a(P)) \\ &= (\boldsymbol{\nabla} \times \Upsilon)[T(P)] \\ R &:= (\boldsymbol{\nabla} \times \Upsilon) \end{aligned} \tag{57}$$

ただし、I は恒等写像（ 2 階テンソル）、Υ は線形写像にその随伴写像を与える 4 階テンソルとする。

以上の結果、各場の微分量と微分写像に対して基本的には、“ 勾配量はナブラと場の写像積 ”、“ 発散量はナブラと場のスカラー積 ”、“ 回転量はナブラと場のベクトル積 ” として導出されることになった。この系統的な導出を与えるために使用された記号的ベクトル “ ナブラ ” の果たす役割は極めて重要である。

5　場の積分法

5.1　面積素・体積素

連続体を 3 次元アフィン $\mathcal{A}^3$ 内の閉曲面で囲まれた閉領域と考え、各物体点に依存する量としてのスカラー・ベクトル・テンソル場の積分を考える。その積分は、曲面および閉領域を対象として定義されるので曲面および閉領域のある点での微小要素を定めなければならない。

閉曲面を S とし、その任意の点 $P \in \mathcal{A}^3$ を 2 次元閉領域 D に含まれる 2 つの実数変数の組 $(l, m) \equiv \boldsymbol{l}$ による微分可能な写像 $\boldsymbol{f}$ を用いて表すものとする。曲面上の任意の点 P における微小面積は、この点における 2 つの接ベクトル、

$$\boldsymbol{T}_l(P) := \frac{\partial}{\partial l}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l}) = \frac{\partial f^i}{\partial l}(l,m)\boldsymbol{g}_i$$
$$\boldsymbol{T}_m(P) := \frac{\partial}{\partial m}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l}) = \frac{\partial f^i}{\partial m}(l,m)\boldsymbol{g}_i$$

を用いることによって、次のように表され、“面積素”または、“面素”とよぶ。

$$dS(P) := \| \boldsymbol{T}_l(P) \times \boldsymbol{T}_m(P) \| \, da \quad (\, da := dl\ dm) \tag{58}$$

上記の 2 つの接ベクトルを用いて法線ベクトルが構成できるので、それを正規化し、向き付け可能な曲面 S に対し“外向き単位法線ベクトル”を次のように定義する。

$$\boldsymbol{n}(P) := \frac{\boldsymbol{T}_l(P) \times \boldsymbol{T}_m(P)}{\| \boldsymbol{T}_l(P) \times \boldsymbol{T}_m(P) \|} \tag{59}$$

なお、これらの 3 つのベクトルの組 $(\boldsymbol{T}_l(P), \boldsymbol{T}_m(P), \boldsymbol{n}(P))$ は右手系の独立なベクトルの組を構成するものとする。この外向き単位法線ベクトルを用いて、面素 (58) を次のようにベクトル化し、“面素ベクトル”とよぶ。

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{S}(P) &:= \boldsymbol{n}(P)\ dS \\ &= (\boldsymbol{T}_l(P) \times \boldsymbol{T}_m(P))\ da \end{aligned} \tag{60}$$

一方、$\mathcal{A}^3$ の閉領域内の任意の点 P における微小体積は、各基底ベクトル方向の微小ベクトルのスカラー 3 重積（第 2 講式 (30)）を用いることによって“体積素”とよび次のように表す。

$$\begin{aligned} dV(P) &:= [(dx^1)\boldsymbol{g}_1\ (dx^2)\boldsymbol{g}_2\ (dx^3)\boldsymbol{g}_3] \\ &= [\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3]\ dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= \sqrt{g}\ dv \qquad (dv := dx^1 dx^2 dx^3) \end{aligned} \tag{61}$$

5.2　面積分・体積分

連続体の表面上の点に依存して定まる物理量（単位面積当たり）の総和を与えるのが次に示す曲面上の積分である。

定義　場の曲面上の積分

$\mathcal{A}^3$ 上の各場を Φ とする。向き付け可能曲面 $S; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ に関する場の積分を次のように D 上の 2 重積分として定義する。

$$\begin{aligned} \int_S \Phi dS &:= \int_S \Phi(P) dS(P) \\ &= \iint_D \Phi(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})) \parallel \boldsymbol{T}_l(\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{T}_m(\boldsymbol{u}) \parallel da \end{aligned} \tag{62}$$

この曲面上の積分は式 (60) の面素ベクトルを用いることによって各場に対し D 上の 2 重積分に帰着できる。

次に、単位体積当たりの物理量の総和を求めるには物理量としての各場の領域積分が必要となる。そこで、次のような体積分を定義する。

定義　場の体積分

$\mathcal{A}^3$ 上の各場を Φ とする。3 次元閉領域 V に対する体積分を次のように 3 重積分として定義する。

$$\begin{aligned} \int_V \Phi\ dV &:= \int_V \Phi(P)\ dV(P) \\ &= \iiint_V \Phi(P)\ \sqrt{g}\ dv \end{aligned} \tag{63}$$

6　発散定理

6.1　スカラー場

スカラー・ベクトル・テンソルの各場の微分量に対する積分との関係は、いわゆる次に示す「微分積分の基本定理」、

$$\int_a^b \frac{d}{dx} f(x) dx = [f(x)]_a^b$$

の拡張として表される。このような関係を“発散定理”(divergence theorem) とよぶ。　発散定理の最も基本的な関係式が次に示すスカラー場に関する積分定理である。

定理　スカラー場の積分定理

$\mathcal{A}^3$ 上のスカラー場 $f(P)$ の勾配ベクトル場が存在するならば閉曲面 S で囲まれた閉領域 V の積分の間に次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \int_S f(P)\ d\boldsymbol{S}(P) &= \int_S f(P)\boldsymbol{n}(P)\ dS(P) \\ &= \int_V grad\ f(P)\ dV(P) \\ &= \int_V \boldsymbol{\nabla} f(P)\ dV(P) \end{aligned} \tag{64}$$

この積分定理からベクトル場とテンソル場の発散・回転量に関する以下に示すような積分定理が得られる。

6.2　ベクトル場

ベクトル場に対して以下に示すような 3 つの積分定理が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
(a)\int_S (d\boldsymbol{S}(P)\cdot\boldsymbol{v}(P)) &= \int_S (\boldsymbol{n}(P)\cdot\boldsymbol{v}(P))dS(P)\\
&= \int_V div\ \boldsymbol{v}(P)dV(P)\\
&= \int_V (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}(P))dV(P)
\end{aligned}
\tag{65}
$$

$$
\begin{aligned}
(b)\int_S (d\boldsymbol{S}(P)\times\boldsymbol{v}(P)) &= \int (\boldsymbol{n}(P)\times\boldsymbol{v}(P))dS(P)\\
&= \int_V rot\ \boldsymbol{v}(P)dV(P)\\
&= \int_V (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}(P))dV(P)
\end{aligned}
\tag{66}
$$

$$
\begin{aligned}
(c)\int_S (d\boldsymbol{S}(P)\odot\boldsymbol{v}(P)) &= \int_S (\boldsymbol{n}(P)\odot\boldsymbol{v}(P))dS(P)\\
&= \int_V grad\ \boldsymbol{v}(P)dV(P)\\
&= \int_V (\boldsymbol{\nabla}\odot\boldsymbol{v}(P))dV(P)
\end{aligned}
\tag{67}
$$

6.3　テンソル場

テンソル場に関しては、以下のような 3 つの積分定理が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
(a)\int_S T(P)[d\boldsymbol{S}(P)] &= \int_S T(P)[\boldsymbol{n}(P)]dS(P)\\
&= \int_V (div\ T(P))dV(P)\\
&= \int_V T(P)[\boldsymbol{\nabla}]dV(P)
\end{aligned}
\tag{68}
$$

または、次のような表現も与えられる。

$$
\begin{aligned}
\int_S (d\boldsymbol{S}(P)\cdot T^a(P)) &= \int_S (\boldsymbol{n}(P)\cdot T^a(P))dS(P)\\
&= \int_V (\boldsymbol{\nabla}\cdot T^a(P))dV(P)\\
&= \int_V ((\boldsymbol{\nabla}\cdot\Upsilon)T(P))dV(P)\\
&= \int_V div\ T(P)dV(P)
\end{aligned}
\tag{69}
$$

$$
\begin{aligned}
(b)\int_S (d\boldsymbol{S}(P)\times\boldsymbol{g}^j)\odot\boldsymbol{g}_j)T^a(P)&\\
&= \int_S (d\boldsymbol{S}(P)\times T^a(P))\\
&= \int_S (((\boldsymbol{n}(P)\times\boldsymbol{g}^j)\odot\boldsymbol{g}_j)T^a(P))dS(P)\\
&= \int_S (\boldsymbol{n}(P)\times T^a(P))dS(P)\\
&= \int_S ((\boldsymbol{n}(P)\times\Upsilon)T^a(P))dS(P)\\
&= \int_V rot\ T(P)dV(P)\\
&= \int_V (((\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{g}^j)\odot\boldsymbol{g}_j)T^a(P))dV(P)\\
&= \int_V ((\boldsymbol{\nabla}\times\Upsilon)T(P))dV(P)
\end{aligned}
\tag{70}
$$

$$
\begin{aligned}
(c)\int_S (d\boldsymbol{S}\odot T^a(P))dS(P)&\\
&= \int_S (\boldsymbol{n}\odot T^a(P))dS(P)\\
&= \int_V (\boldsymbol{\nabla}\odot T^a(P))dV(P)\\
&= \int_V ((\boldsymbol{\nabla}\odot\Upsilon)T(P))dV(P)\\
&= \int_V grad\ T(P)dV(P)
\end{aligned}
\tag{71}
$$

以上の結果、テンソル場の微分量に対する積分定理は、面分ベクトルと随伴テンソル場のスカラー積、ベクトル積、写像積演算によって表現できた。ただし、上記の (69)〜(71) の表現中の Υ は、既に 4.7 で導入した交代作用素（4 階テンソル）$T^a(P) = \Upsilon[T(P)]$ とする。

これらの積分定理から明らかなことは領域 V 上での「ナブラ」の作用はその境界曲面 S 上では面の「外向き単位法線ベクトル」として現れることになる。このような記号的ベクトルの有する幾何学的な解釈は、各場の微分量を「ナブラ」用いることによって明らかとなった。このことが「ナブラ」を用いることの本質的な意味である。

本章ではベクトル場のみならずテンソル場を含めて成立する「発散定理」とよばれている積分定理の種々の形式として、スカラー場に対する表現 (64)、ベクトル場に対する表現 (65)〜(67) およびテンソル場に対する表現 (68)〜(71) を示した。なお、文献 [3] では、ベクトル場を対象として、その勾配、発散および回転という微分演算に対して成立する積分定理を各々、「勾配定理」、「発散定理」、「回転定理」とよんで区別している。

参考文献

[1] 登坂宣好：連続体力学とテンソル解析、日本計算工学会計算工学講演会論文集、Vol. 18, (2013)

[2] 登坂宣好 : ベクトル・テンソル場の微分積分、日本計算工学会計算工学講演会論文集、Vol. 20, (2015)

[3] 太田浩一：ベクトル解析と微分積分　「ナブラのための協奏曲」、共立出版、　(2015)

[4] 有馬哲、浅枝陽：ベクトル場と電磁気（電磁気学と相対論のためのベクトル解析)、東京図書（株)、(1987)

[5] Gurtin, M. E.: An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, (2003)

[6] 新井朝雄：現代ベクトル解析の原理と応用、共立出版、(2006)

[7] Green, A. E. and W. Zerna : Theoretical Elasticity (Theoretical Continuum Mechanics), Oxford Univ. Press, (1954)

[8] Gurtin, M. E. : The Linear Theory of Elasticity (in Encyclopedia of Physics, Vol. IVa/2), Springer- Verlag, (1972)

チュートリアル連載を終わるにあたって

これまで本誌の貴重な紙面をお借りして、1 年間をかけて「チュートリアル」テンソル代数・テンソル解析ー連続体力学の数理的基礎ーを 4 回にわたって連載してきた。

テンソル代数・テンソル解析を講述する立場について種々存在するが、いわゆる“教養数学”を基礎知識とした場合のテンソル代数とテンソル解析を構築することに心がけてきた。すなわち、テンソルを線形空間上の線形写像として捉える立場を踏襲した。この線形写像を表現する上で 2 つのベクトルによる“写像積”を導入した。さらに、テンソル場の勾配、発散、回転という微分量を定義する際に、従来のベクトル間のスカラー積、ベクトル積およびこの写像積をベクトルと線形写像の演算として拡張した。この結果、ベクトル解析を含めてテンソル解析が系統的に展開できた。このことによって、テンソルの学習は容易になると考えたからである。それが本チュートリアルの特徴である。

なお、本チュートリアルのテンソル解析では正規直交座標系のみならず斜交座標系を対象として基底ベクトルが点に依存しない場合に限定した。そのために、球および円筒座標系のような基底ベクトルが点に依存するような曲線座標系を採用しなかった。テンソル解析では、曲線座標系による一般的な展開が行われている。この場合には、各場の空間変数に関する微分操作は、いわゆる“共変微分”操作となる。

現在では、テンソル代数は、多重線形関数のテンソル積と外積から得られる交代テンソルとして展開されている。さらに、テンソル解析は、交代テンソル場の微分形式から構築され、積分定理は多様体を対象として極めて一般的に表現されている。このような立場では、多重線形代数学と外積代数および多様体論の知識が必要となる。

連続体力学は、運動学（物体、運動、変形、歪）、基本法則（質量保存則、運動量保存則、エネルギ保存則)、力（表面力、物体力、応力）および構成式（構成則原理、等方物体等）に関する理論の体系化である。本チュートリアルで述べたテンソル代数とテンソル解析の知識でその理論の大部分を理解することができる。ただし、応力ー歪関係式のような構成式の導出と展開では、テンソルを変数としてテンソルを値とする関数、すなわちテンソル関数の表現論の基礎となる「等方関数」(isotropic function) の概念が必要となるが、紙面の関係上その点に触れることができなかった。その点を除いて、連続体力学における基礎理論の理解と応用について、本チュートリアルで述べてきた内容を理解することで十分であると確信している。

本チュートリアルが計算力学を専攻する若い研究者や技術者の目にとまり、その理論的ベースである連続体力学を学ぼうとする際に発生すると思われる「テンソル」アレルギー解消の一助となるならば筆者として大変嬉しい。

最後になりましたが、本チュートリアルを 1 年間にわたって直接担当していただいた本誌編集委員会幹事の只野裕一先生（佐賀大学）のサポートに深く感謝いたします。