2027年度

九州大学理学部数学科第３年次編入学試験問題

注意事項

(1)　試験開始の合図があるまで, 問題冊子の中を見てはいけません.

(2)　問題は4問あります.

(3)　「解答はじめ」の合図があったら問題冊子を開き，不足等に気づいた場合は手をあげて監督者に知らせてください.

(4)　試験開始後，各解答用紙に，受験番号，氏名を記入してください.

(5)　解答用紙の表に書ききれない場合は，裏に続けて書いてください．それでも不足するときは，手をあげて監督者に申し出て追加の解答用紙を受取り，問題番号，受験番号，氏名を記入してください.

(6)　試験終了後，解答用紙は，解答の記入のあるなしにかかわらず，すべて提出してください．問題冊子は持ち帰ってください.

九州大学理学部数学科

(1 枚白紙：計算用紙として利用できます)

[1] n は2以上の整数とする．非零ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $Q(\boldsymbol{u}) = I - \dfrac{2}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$ とおく. ただし, I は n 次単位行列, $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$, $\boldsymbol{u}^T$ は $\boldsymbol{u}$ の転置を表す.
次の問いに答えよ.

(1) 任意の $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $Q(\boldsymbol{u})$ は直交行列であることを示せ.

(2) 任意の $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $Q(\boldsymbol{u})$ は 1 を固有値として持つことを示せ.

(3) 任意の $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $Q(\boldsymbol{u})$ は -1 を固有値として持つことを示せ.

[2] $\mathbb{R}[x]_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ とする. $\mathbb{R}[x]_2$ は自然に定義される和とスカラー倍に関して $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる. 写像 $T : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ を, 任意の $f \in \mathbb{R}[x]_2$ に対して,

$$(Tf)(x) = f''(0)x^2 + (-2f(0) - f'(0) + f''(0))\, x + \left(f(0) + \frac{1}{2} f''(0) \right)$$

と定義する. 次の問いに答えよ.

(1) T は $\mathbb{R}[x]_2$ 上の線形写像であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列 A を求めよ.

(3) 自然数 n に対し, A^n を求めよ.

(4) 自然数 n と $f \in \mathbb{R}[x]_2$ に対し, $T^n f$ の式を求めよ.

[3] 任意の正整数 k に対して，$\phi_k(t) = \dfrac{\log(1+e^{kt})}{k}$ とする．また各 $t \in \mathbb{R}$ に対し，$g(t) = \lim\limits_{k\to\infty} \phi_k'(t)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\phi_k'(t), \phi_k''(t)$ を求めよ．また各 $t \in \mathbb{R}$ に対する $g(t)$ の値を求めよ．

(2) $\alpha < 0 < \beta$ とする．区間 $[\alpha, \beta]$ で関数列 $\{\phi_k'(t)\}_{k=1}^{\infty}$ は $g(t)$ に一様収束するか? 理由とともに答えよ．

(3) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，以下が成立することを示せ．

$$\max\{0, t\} < \phi_k(t) \leq \max\{0, t\} + \frac{\log 2}{k}$$

(4) 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f, g : D \to \mathbb{R}$ に対して，

$$u_k(x, y) = \frac{\log\left(e^{kf(x,y)} + e^{kg(x,y)}\right)}{k} \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

とする．D 上で関数列 $\{u_k(x, y)\}_{k=1}^{\infty}$ は $\max\{f(x, y), g(x, y)\}$ に一様収束するか? 理由とともに答えよ．

[4] 正の実数 $x, y > 0$ に対して

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

とする．次の問いに答えよ．必要に応じて関係式

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

を用いてよい．

(1) $n > -1$ に対して，以下が成立することを示せ．

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

(2) $p_1, p_2, p_3 > 0$ とし，

$$D_3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2, x_3 > 0,\ \sum_{i=1}^{3} x_i \leq 1 \right\}$$

とする．このとき，以下が成立することを示せ．

$$\int_{D_3} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} x_3^{p_3-1} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\Gamma(p_3)}{\Gamma(1+p_1+p_2+p_3)}$$

(1 枚白紙：計算用紙として利用できます)